

BAUTECHNIK-ARCHIV

HEFT 15

Zur Theorie und Berechnung von Schalenträgwerken in Form gleichseitiger hyperbolischer Paraboloiden

Von

Dr.-Ing. Werner Bongard



VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN BERLIN

BAUTECHNIK-ARCHIV

HEFT 15

Zur Theorie und Berechnung von Schalentragwerken in Form gleichseitiger hyperbolischer Paraboloiden

Von

Dr.-Ing. Werner Bongard

Mit 20 Bildern



BERLIN 1959

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN

Alle Rechte, insbesondere das der Übersetzung, vorbehalten.
Nachdruck und fotomechanische Wiedergabe, auch auszugsweise, nicht gestattet.
© 1959 by Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin.
Printed in Germany

„Die vorliegende Arbeit wurde im Juli 1957 der Fakultät für Bauwesen an der Technischen Hochschule Karlsruhe als Dissertation eingereicht und genehmigt. Dem Referenten, Prof. Dr.-Ing. Steinhardt, sowie den Korreferenten, Prof. Dr.-Ing. Fritz und Prof. Dr. phil. Wegner, gilt der besondere Dank des Verfassers.“

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung	1
2. Analytische Voraussetzungen zur Schalenform	3
2.1 Grundlegendes aus der Differentialgeometrie krummer Flächen.	3
2.2 Zur Geometrie des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides	4
3. Die Gleichgewichtsbedingungen der hyperbolischen Paraboloidschale	7
3.1 Einführung.	7
3.2 Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben	9
3.21 Die allgemeinen Grundgleichungen	9
3.22 Die Gleichgewichtsbedingungen für die auf die Asymptoten bezogene hyperbolische Paraboloidschale.	11
3.3 Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verdrehen	12
3.31 Die allgemeinen Grundgleichungen	12
3.32 Die Gleichgewichtsbedingungen für die auf die Asymptoten bezogene hyperbolische Paraboloidschale.	14
3.4 Die Ausgangsgleichungen für die vollständige Biegetheorie.	14
4. Die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen am schiefwinkligen Flächenelement	15
4.1 Grundlagen.	15
4.2 Die Dehnungen ϵ_λ und ϵ_μ in Richtung der Koordinatenlinien	16
4.3 Die Gleitung	17
5. Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen für die hyperbolische Paraboloidschale	19
5.1 Grundlagen.	19
5.2 Die Verschiebungen werden in Richtung der Koordinatenachsen gemessen	20
5.3 Die Verschiebungen werden in Richtung der Tangenten und der Normale gemessen.	22
6. Die Erweiterung der Elastizitätsgesetze und der geometrischen Beziehungen für die biegesteife hyperbolische Paraboloidschale	24
6.1 Grundlagen.	24
6.2 Die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen	24
6.3 Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen.	26
7. Die Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen der biegesteifen hyperbolischen Paraboloidschale	28
7.1 Grundlagen.	28
7.2 Die Zurückführung einiger Größen auf die Verschiebungen der Mittelfläche	28
7.21 Die Verschiebungen eines Schalen-Punktes außerhalb der Mittelfläche	28
7.22 Die Verzerrungen außerhalb der Mittelfläche.	29
7.23 Die Spannungen außerhalb der Mittelfläche	30
7.3 Die Schnittgrößen als Funktion der Mittelflächenverschiebungen	31
7.31 Zur Definition der Schnittgrößen.	31
7.32 Die Verschiebungsgleichungen für N_x , N_y und N_{xy}	34
7.33 Die Verschiebungsgleichungen für M_x , M_y , M_{xy} und M_{yx}	34
8. Eine angenäherte Biegetheorie der hyperbolischen Paraboloidschale.	35
8.1 Begründung der Näherung	35
8.2 Die Näherungen für die Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen.	37
8.3 Die angenäherten Gleichgewichtsbedingungen.	38
8.4 Die Aufstellung des Differentialgleichungssystems.	40
8.5 Zur praktischen Lösung des Gleichungssystems.	41
9. Zusammenfassung.	42
Literatur	44

1. Einleitung

In jüngerer Zeit wird die Gruppe der Flächentragwerke um eine eigenwillige Gattung bereichert, die Schalen und Häute in Sattelform. Wegbereitend mag wohl die Idee parabelförmig durchhängender Tragelemente mit einer quer darüber liegenden Schar von Spannkabeln umgekehrter Krümmung gewesen sein. Die amerikanische Raleigh-Arena [17] weist als erste Ausführung ein solches Seilnetz zwischen zwei sich durchdringenden Hyperbelbögen auf. Die Vorspannung des Seilnetzes ist so abgestimmt, daß die Spannkabel stets unter Zug bleiben. Zur Hängewirkung kommt eine gleich bedeutende Gewölbewirkung hinzu. Die beiden Bögen leiten die Dachlast in den Baugrund ab. Bild 1 (links) soll einen Eindruck von Aufbau und architektonischer Wirkung vermitteln. — Man vermag ein Seilnetz z. B. zu Ausstellungszwecken auch unter Verzicht auf die Druckbögen zwischen starken Anfangkabeln zu spannen, die an mindestens vier nicht in einer Ebene liegenden Punkten verankert sind. Otto [17, 18] gebührt das Verdienst, die vielseitige Verwendungsmöglichkeit dieser schnell zu errichtenden Traggebilde für Gegenwarts- und Zukunftsaufgaben aufgezeigt zu haben.

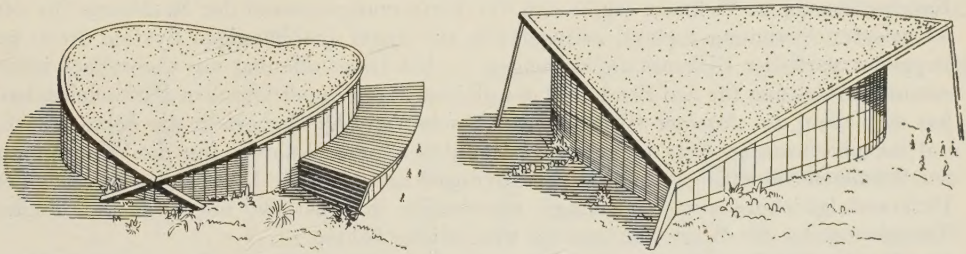


Bild 1

Gegenüber dem biegeschlaffen Seilnetz ist die in sich vorgespannte Stahlbetonschale der gekennzeichneten Form — die geometrisch eine Translationsfläche von der Art des hyperbolischen Paraboloides darstellt — ein erheblich steiferes Tragwerk. Da der Baustoff Beton von Natur aus nur zur Aufnahme von Druckkräften geeignet ist, muß hier eine Vorspannung aufgebracht werden, um die Hängewirkung zu erzielen. Gegen Instabilwerden ist die hyperbolische Paraboloidschale unempfindlich; denn zu jeder Druckbeanspruchung, die ein Beulen auslösen könnte, gehört eine quer dazu wirkende rückstellende Zugkraft, wie man sich anhand eines Modelles leicht überzeugen kann. Noch eine weitere Eigenschaft ist zu erwähnen. Als nicht abwickelbare Fläche ist das hyperbolische Paraboloid bei jeder Verformung einem Dehnspannungszustand unterworfen, der für etwa angefachte Schwingungen der Schale — ungeachtet der noch vorhandenen Biegesteifigkeit — eine sehr starke Dämpfung bedeutet. Hier liegen entscheidende Vorteile gegenüber den Tonnendächern.

Geradlinige Begrenzung von hyperbolischen Paraboloidschalen längs der Asymptoten der Fläche läßt windschiefe Bauformen entstehen. Gut geeignet für die Überdachung großer Flächen erscheint der in Bild 1 (rechts) vorgeschlagene „spitze Sattel“. Das harmonisch schwingende Dach wird von nur längsbeanspruchten Randbalken eingefasst, die ihre Drücke auf zwei Festpunkte absetzen. Eine leichte Abstützung der Randbalken dient der Standfestigkeit des Gebäudes. Verschiedentlich wurden windschiefe Schalen aneinandergereiht [1, 2, 15, 20]. Schneidet man schließlich die hyperbolische Paraboloidschale durch senkrechte Schnitte parallel zu den Hauptparabeln, so entstehen die sogenannten Trogsschalen, die ebenfalls in der Reihung zur Überdachung von Industriehallen Anwendung fanden [11, 24].

Die vorhandene Literatur über hyperbolische Paraboloidschalen umfaßt lediglich Untersuchungen über den Membranzustand, der Momente und Querkräfte in der Schale gänzlich außer acht läßt. Das Gleichgewicht des als biegeschlaff angenommenen Elementes wird durch die verbleibenden Längs- und Schubkräfte allein gewährleistet; allerdings müssen die Lastfunktionen differenzierbar sein. Für eine Anzahl von interessierenden Lastfällen werden die Membrankräfte angegeben [2, 12, 13, 26]. Sie führen zu dem interessanten Ergebnis, daß die Schubkraft in Richtung der geraden Asymptotenlinien unmittelbar, d. h. ohne Integration, als Funktion der örtlichen Belastung angegeben werden kann, wobei die Randbedingungen ohne Einfluß sind. So bleibt insbesondere für eine konstante Grundflächenlast die Schubkraft über die ganze Schale gleich. Die Längskräfte in Richtung der geraden Erzeugenden laufen dann von einem Rand zum anderen in unveränderter Größe durch; eine am Rand aufgebrachte konzentrierte Vorspannung müßte danach die Schale wie ein Pfeil durchstoßen und gegenüber eine ebensolche Reaktionskraft erfordern [6, 15]. Obwohl negativ gekrümmte Schalen tatsächlich in Richtung der geraden Erzeugenden sehr störungsempfindlich sind, beweist doch diese „überspitzte“ Aussage der Membrantheorie ihre Unzulänglichkeit. Zur Auffindung der drei unbekannten Schnittkräfte ist es nicht erforderlich, auf die Verträglichkeit der elastischen Verformungen einzugehen, die deshalb ebenso wenig gesichert ist wie die Erfüllung der geometrischen Randbedingungen. Vielmehr ergibt sich der Verformungszustand der Membrane für den festgelegten Spannungszustand zwangsläufig aus einem unabhängigen System dreier gekoppelter partieller Differentialgleichungen. — Mit dieser offenbar nur theoretisch interessanten Ableitung für den Sonderfall der gleichseitigen hyperbolischen Paraboloidschale hat sich allein der Japaner Shizuo Ban beschäftigt [1]. Er bezieht die Schalenfläche auf das schiefwinklige Netz der geraden Asymptotenlinien. Während ihm die Verknüpfung der Schalenverschiebungen mit den Verzerrungen und auch die Lösung des entstehenden Differentialgleichungssystems gelingt, unterlaufen ihm bei der notwendig werdenden Transformation der Elastizitätsgesetze wesentliche Fehler.

Obwohl die Membrantheorie oft einen guten Überblick über das zu erwartende Tragverhalten der Schale geben kann — es sei angeführt, daß nach der gekürzten Theorie eine konstante Grundflächenbelastung streifenweise durch Seil- und Bogenwirkung in Richtung der Hauptparabeln getragen wird — ist offenbar die Aufstellung einer vollständigen Theorie unumgänglich. Katastrophenfälle [7] zeigen, daß eine überschlägige Berechnung die Sicherheit einer empfindlichen Stahlbetonschale aufs äußerste gefährdet und der Entwicklung der neuen Bauform Abbruch tut. — Während die Kreiszylinderschalen und Rotationsschalen bisher eingehend behandelt wurden, fehlen für die Sonderform der hyperbolischen Paraboloidschalen bis heute ausreichende Grundlagen. Zwar gelang Fuchssteiner und Schader [8] die Aufstellung von allgemeinen Grundgleichungen für beliebig geformte biegesteife Schalen. Die Arbeit führt einige erleichternde Voraussetzungen ein und bedient sich zur Ableitung von Gleichgewichts- und Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen des Prinzips der virtuellen Verrückungen sowie des daraus hergeleiteten zweiten Variationsprinzips. Das Differentialgleichungssystem für die Verschiebungen konnte jedoch nicht angegeben werden. Bis zur gleichen Stufe gelangen die fundamentalen Arbeiten von Fadle [3], Neuber [16], Parkus [19], Rüdiger [23] und Zerna [29, 30], die zudem für den praktischen Ingenieur wegen des stets verwandten Tensorkalküls nur schwer zugänglich sind.

Die vorliegende Arbeit hat sich zum Ziel gesetzt, die vorhandene Lücke in der Theorie der gleichseitigen hyperbolischen Paraboloidschalen weitgehend zu schließen. Sie bedient sich dabei der übersichtlichen Mittel der Vektoranalysis. Neben den in der Schalentheorie üblichen Vereinfachungen wird eine Näherung vorgeschlagen, die je nach Größe der Schalenkrümmung und der gewünschten Rechengenauigkeit Berücksichtigung finden kann. Dadurch ist es möglich, ein geschlossenes Differentialgleichungssystem anzugeben.

2. Analytische Voraussetzungen zur Schalenform

2.1 Grundlegendes aus der Differentialgeometrie krummer Flächen

Bevor die geometrischen Eigenschaften des hyperbolischen Paraboloides behandelt werden, seien die wesentlichen Beziehungen aus der Differentialgeometrie der krummen Flächen vorangestellt.

Wenn die Koordinaten x, y, z eines Punktes M in einem festen dreiaxialen rechtwinkligen Koordinatensystem stetige Funktionen von zwei Veränderlichen λ, μ (Parametern) sind, so beschreibt der Punkt im allgemeinen eine krumme Fläche. Die Kurven $\lambda = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$, die Koordinatenlinien, bezeichnen ein krummliniges Netz. Der zugehörigen Vektorgleichung

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\lambda, \mu) \quad (1)$$

sind die drei Komponentengleichungen

$$x = x(\lambda, \mu), \quad y = y(\lambda, \mu) \quad \text{und} \quad z = z(\lambda, \mu) \quad (2)$$

äquivalent. Eliminiert man die Parameter λ und μ , dann ist die Fläche bestimmt durch die Gleichung

$$F(x, y, z) = 0 \quad (3)$$

oder, nach z aufgelöst, durch

$$z = z(x, y). \quad (4)$$

Diese letztere explizite Form ergibt sich auch, wenn man x und y als Parameter verwendet.

Für den Ortsvektor $\mathbf{r}(\lambda, \mu)$ gelten die Rechenregeln für Vektoren. Es sei vorausgesetzt, daß $\mathbf{r}(\lambda, \mu)$ ebenso wie die drei Komponenten genügend oft differenzierbar ist. Die partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \lambda}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mu}, \quad \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial \lambda^2}$$

sowie z. B. $\frac{\partial x}{\partial \lambda}, \frac{\partial x}{\partial \mu}$ werden zur Abkürzung mit $r_\lambda, r_\mu, r_{\lambda\lambda}$ bzw. mit x_λ, x_μ bezeichnet.

Das Quadrat des Linienelementes $d\mathbf{r}$ berechnet sich zu

$$d\mathbf{r}^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E d\lambda^2 + 2 F d\lambda d\mu + G d\mu^2. \quad (5)$$

Hierin bedeuten

$$E = r_\lambda^2 = \alpha^2 = x_\lambda^2 + y_\lambda^2 + z_\lambda^2, \quad (6)$$

$$F = r_\lambda \cdot r_\mu = \gamma^2 = x_\lambda \cdot x_\mu + y_\lambda \cdot y_\mu + z_\lambda \cdot z_\mu, \quad (7)$$

$$G = r_\mu^2 = \beta^2 = x_\mu^2 + y_\mu^2 + z_\mu^2 \quad (8)$$

die Gaußschen Fundamentalgrößen erster Ordnung.

Die Einheitsvektoren der Tangenten $\mathbf{t}_\lambda$ und $\mathbf{t}_\mu$ kennzeichnen die Fortschrittingsrichtung der Koordinatenlinien $\mu = \text{const}$ und $\lambda = \text{const}$ im Punkte M . Ihre Größe ist mit (6) und (8)

$$\mathbf{t}_\lambda = \frac{1}{\alpha} r_\lambda \quad \text{und} \quad \mathbf{t}_\mu = \frac{1}{\beta} r_\mu. \quad (9a, b)$$

Die beiden Netzkurven schließen im Punkte M den Koordinatenwinkel δ ein, der sich berechnen läßt aus

$$\cos \delta = \mathbf{t}_\lambda \cdot \mathbf{t}_\mu = \frac{\gamma^2}{\alpha \beta} \quad \text{und} \quad \sin \delta = \frac{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}}{\alpha \beta}. \quad (10a, b)$$

Ist $F = \gamma^2 = 0$, so bilden die Koordinatenlinien ein orthogonales Netz, d. h. sie schneiden

sich überall senkrecht. Durch das vektorielle Produkt der beiden Tangentenvektoren wird der Einheitsvektor $\mathfrak{N}$ der Flächennormalen im Punkte M bestimmt.

$$\mathfrak{N} = \frac{\mathbf{r}_\lambda \times \mathbf{r}_\mu}{|\mathbf{r}_\lambda \times \mathbf{r}_\mu|} = \frac{\mathbf{r}_\lambda \times \mathbf{r}_\mu}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}}. \quad (11)$$

Für die Größe des Flächenelementes dO gilt

$$dO = \alpha \beta \sin \delta \, d\lambda \, d\mu = \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4} \, d\lambda \, d\mu. \quad (12)$$

Jede die Flächennormale $\mathfrak{N}$ in M enthaltende Ebene schneidet die Fläche in einer Schnittlinie, die ein Normalschnitt der Fläche heißt; seine Krümmung n im Punkte M nennt man Normalkrümmung. Es ist

$$n = \frac{L d\lambda^2 + 2M d\lambda d\mu + N d\mu^2}{E d\lambda^2 + 2F d\lambda d\mu + G d\mu^2}, \quad (13)$$

worin

$$L = -\mathbf{r}_\lambda \cdot \mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{N} \cdot \mathbf{r}_{\lambda\lambda}, \quad (14a)$$

$$M = -\mathbf{r}_\mu \cdot \mathfrak{N}_\lambda = -\mathbf{r}_\lambda \cdot \mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N} \cdot \mathbf{r}_{\lambda\mu}, \quad (14b)$$

$$N = -\mathbf{r}_\mu \cdot \mathfrak{N}_\mu = \mathfrak{N} \cdot \mathbf{r}_{\mu\mu} \quad (14c)$$

die Gaußschen Fundamentalgrößen zweiter Ordnung bedeuten.

Die beiden Kurvenscharen einer Fläche, deren Tangenten jeweils die Normalschnitte der Normalkrümmung $n = 0$ bestimmen, heißen die Asymptotenlinien der Fläche. Sie sind nur reell, wenn das Gaußsche Krümmungsmaß $K < 0$ ist. Wird $L = 0$ und $N = 0$, so besteht das Netz der Koordinatenlinien aus den Asymptotenlinien. Ist dagegen $F = 0$ und $M = 0$, so stellen die Koordinatenlinien gleichzeitig die stets aufeinander senkrechten Krümmungslinien dar. Translations- oder Schiebflächen haben mit $M = 0$ ein konjugiertes Netz von Koordinatenlinien.

2.2 Zur Geometrie des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides

Die einfachste Gleichung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides in der Form (4) lautet

$$z = \frac{x \cdot y}{a}. \quad (15)$$

x, y, z sind die Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem, a ein fester Parameter. Der Ortsvektor $\mathbf{r}$ hat die einfachen Komponentengleichungen

$$x = x, \quad y = y \quad \text{und} \quad z = \frac{xy}{a}, \quad (16a-c)$$

in denen die allgemeinen Parameter λ und μ aus (2) durch x und y ersetzt werden konnten. Der Ursprung des Koordinatensystems liegt im Sattelpunkt der Fläche, seine Achsen x und y sind identisch mit den Hauptasymptotenlinien des hyperbolischen Paraboloides. Die Höhenlinien $z = \text{const}$ sind gleichseitige Hyperbeln $x \cdot y = a \cdot c$, Bild 2; die Frontlinien $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ Geraden mit linear zunehmender Steigung, Bild 3. Diese Geraden sind bei dem gewählten Bezugssystem die Koordinatenlinien und insbesondere die Asymptotenlinien der Fläche, wie noch bewiesen wird.

Die Ableitungen des Vektors $\mathbf{r}$ nach x und y lauten in Komponentenschreibweise

$$\mathbf{r}_x = \left(1; 0; \frac{y}{a}\right), \quad \mathbf{r}_y = \left(0; 1; \frac{x}{a}\right). \quad (17a, b)$$

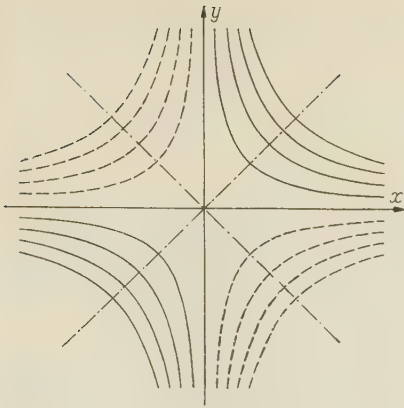


Bild 2

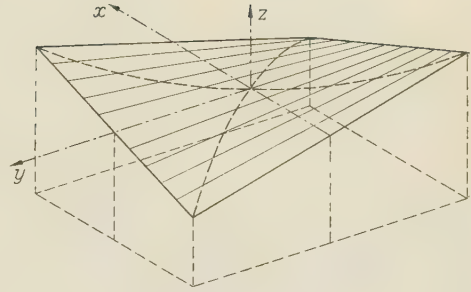


Bild 3

Mit den Abkürzungen

$$S = \sqrt{a^2 + x^2} \quad \text{und} \quad T = \sqrt{a^2 + y^2} \quad (18a, b)$$

berechnen sich daraus die Fundamentalgrößen erster Ordnung zu

$$E = r_x^2 = \alpha^2 = \frac{1}{a^2} (a^2 + y^2) = \frac{T^2}{a^2}, \quad (19a)$$

$$F = r_x \cdot r_y = \gamma^2 = \frac{xy}{a^2}, \quad (19b)$$

$$G = r_y^2 = \beta^2 = \frac{1}{a^2} (a^2 + x^2) = \frac{S^2}{a^2}. \quad (19c)$$

$$\text{Führt man } R = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2} \quad (20)$$

als weitere Abkürzung ein, dann ergibt sich aus (9a, b), (11), (10a, b) und (12)

$$r_x = \frac{1}{\alpha} r_x = \frac{a}{T} \left(1; 0; \frac{y}{a} \right), \quad r_y = \frac{1}{\beta} r_y = \frac{a}{S} \left(0; 1; \frac{x}{a} \right), \quad (21a, b)$$

$$\mathfrak{N} = \frac{r_x \times r_y}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}} = \frac{a}{R} \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & y/a \\ 0 & 1 & x/a \end{vmatrix}$$

$$\text{oder } \mathfrak{N} = \frac{a}{R} \left(-\frac{y}{a}; -\frac{x}{a}; 1 \right), \quad (22)$$

$$\cos \delta = \frac{xy}{ST} \quad \text{und} \quad \sin \delta = \frac{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}}{\alpha \beta} = \frac{aR}{ST}, \quad (23a, b)$$

$$dO = \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4} dx dy = \frac{R}{a} dx dy. \quad (24)$$

Die Fundamentalgröße zweiter Ordnung M ist einzusetzen mit

$$M = \mathfrak{N} \cdot r_{xy} = \frac{1}{R}, \quad (25)$$

während leicht einzusehen ist, daß die Größen L und N verschwinden.

Bild 4 zeigt ein „windschiefes“ Flächenstück, das durch die positiven Achsen $x=x$ und $y=y$ sowie zwei Koordinatenlinien $x = \text{const}$ und $y = \text{const}$ begrenzt wird. Die

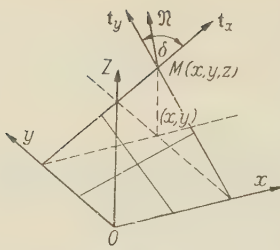


Bild 4

drei Einheitsvektoren der Tangenten und der Normalen bilden ein Rechtssystem und verändern ihre Lage beim Fortschreiten auf den Koordinatenlinien.

Neben der Asymptotendarstellung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides verdient die Schreibweise

$$z = \frac{\xi^2 - \eta^2}{2a} \quad (26)$$

Erwähnung. Hier sind ξ, η, z Koordinaten in einem kartesischen Koordinatensystem, das nach den Hauptparabeln der Fläche ausgerichtet ist. Die Konstante a hat dieselbe Bedeutung wie in (15).

Häufig ist es sehr nützlich, eine Fläche auf ihre Krümmungslinien zu beziehen, d. h., eine solche Parameterdarstellung $r(\bar{\lambda}, \bar{\mu})$ zu wählen, daß die Linien $\bar{\lambda} = \text{const}$ und $\bar{\mu} = \text{const}$ Krümmungslinien sind. Ausgehend von einer beliebigen Darstellung $r = r(\lambda, \mu)$ gelangt man zu der Gleichung der Krümmungslinien, wenn man die Bedingung

$$\begin{vmatrix} d\lambda^2 & -d\lambda d\mu & d\mu^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$

auf löst. Wählt man z. B. zunächst solche Parameter, daß

$$\xi = \frac{a}{\sqrt{2}} (\text{Sinh } \lambda + \text{Sinh } \mu), \quad \eta = \frac{a}{\sqrt{2}} (\text{Sinh } \lambda - \text{Sinh } \mu) \\ \text{und} \quad z = a \cdot \text{Sinh } \lambda \cdot \text{Sinh } \mu,$$

dann sind die beiden Scharen der Krümmungslinien, wie ohne Zwischenrechnung angeführt werden soll, ausgezeichnet durch die Relationen

$$\mu_1 = \lambda + c_1 \quad \text{und} \quad \mu_2 = -\lambda + c_2.$$

Werden nun weiterhin neue Parameter

$$\lambda + \mu = 2\bar{\lambda} \quad \text{und} \quad \lambda - \mu = 2\bar{\mu}$$

eingeführt, so gewinnt man die Darstellung des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides, bezogen auf seine Krümmungslinien:

$$\xi = \sqrt{2} a \text{Sinh } \bar{\lambda} \cdot \text{Cosh } \bar{\mu}, \quad \eta = \sqrt{2} a \text{Sinh } \bar{\mu} \cdot \text{Cosh } \bar{\lambda}, \quad z = a (\text{Sinh}^2 \bar{\lambda} - \text{Sinh}^2 \bar{\mu}). \quad (27)$$

Das zugehörige Koordinatensystem ist wie bei (26) nach den beiden Hauptachsen der Fläche ausgerichtet. Der Beweis für die Richtigkeit der obigen Behauptung läßt sich leicht erbringen, indem man zeigt, daß die Gaußschen Konstanten F und M verschwinden. Die schwierige Verwendbarkeit dieser Darstellung mag jedoch aus den Formen für E, G, N und L hervorgehen, die der Vollständigkeit halber noch angegeben werden sollen:

$$\begin{aligned} E &= a^2 [\text{Cosh}^2 (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) + \text{Cosh}^2 (\bar{\lambda} - \bar{\mu}) + \text{Sinh}^2 2\bar{\lambda}], \\ G &= a^2 [\text{Cosh}^2 (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) + \text{Cosh}^2 (\bar{\lambda} - \bar{\mu}) + \text{Sinh}^2 2\bar{\mu}], \\ L &= -\frac{a^3}{\sqrt{EG}} [\text{Sinh } 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \text{Sinh } 2(\bar{\lambda} - \bar{\mu}) - 4 \text{Cosh}^2 \bar{\mu} \cdot \text{Cosh } 2\bar{\lambda}], \\ N &= -\frac{a^3}{\sqrt{EG}} [\text{Sinh } 2(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \text{Sinh } 2(\bar{\lambda} - \bar{\mu}) + 4 \text{Cosh}^2 \bar{\mu} \cdot \text{Cosh } 2\bar{\mu}]. \end{aligned} \quad (28)$$

3. Die Gleichgewichtsbedingungen der hyperbolischen Paraboloidschale

3.1 Einführung

Die vorliegende Arbeit will sich mit Schalentragwerken beschäftigen, deren Mittelflächen nach einem gleichseitigen hyperbolischen Paraboloid geformt sind. Der Abstand der beiden Leibungen, die Schalendicke, sei mit h bezeichnet. Es wird wie üblich vorausgesetzt, daß die Schalendicke klein ist gegenüber den anderen Abmessungen der Schalen. Sie kann im übrigen aber mit dem Ort beliebig veränderlich sein.

Der Beanspruchungszustand einer Schale infolge beliebiger äußerer Belastung wird gekennzeichnet durch die Schnittgrößen am Schalenelement, das durch Normalschnitte $\lambda = \text{const}$, $\mu = \text{const}$ und $\lambda + d\lambda$ sowie $\mu + d\mu$ der Mittelfläche entsteht. Zweckmäßig geht man von den Spannungen im untersuchten Schnitt aus, wenn man die Schnittgrößen definieren will.

In Bild 5 ist die Spannungserresultierende des Schnittflächenelementes dF zerlegt in die drei Komponenten σ_λ , $\tau_{\lambda\mu}$ und $\tau_{\lambda s}$ in Richtung der Tangenten t_λ und t_μ sowie der Normalen $\mathfrak{N}$ der Mittelfläche. Bei beliebiger Verteilung der Spannungen über die Schalendicke erhält man z. B. für die Längs- und Schubkräfte

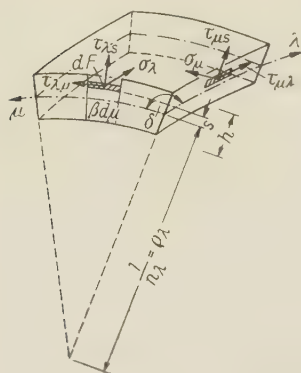


Bild 5

$$N_\lambda = \frac{1}{\beta d\mu} \int \sigma_\lambda \cdot dF.$$

Im Abstand s von der Mittelfläche ist dF mit dem Krümmungsradius

$$\varrho_\lambda = \frac{1}{n_\lambda}$$

$$dF = \beta d\mu \frac{\varrho_\lambda + s}{\varrho_\lambda} ds;$$

damit wird

$$N_\lambda = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\lambda \left(1 + \frac{s}{\varrho_\lambda}\right) ds; \quad (29)$$

Entsprechend ist die Definitionsgleichung für die Längskraft N_μ :

$$N_\mu = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_\mu \left(1 + \frac{s}{\varrho_\mu}\right) ds. \quad (30)$$

Die beiden Schubkräfte genügen den Gleichungen

$$N_{\lambda\mu} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\lambda\mu} \left(1 + \frac{s}{\varrho_\lambda}\right) ds, \quad N_{\mu\lambda} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{\mu\lambda} \left(1 + \frac{s}{\varrho_\mu}\right) ds. \quad (31 \text{ a, b})$$

Durch Integration der Schubspannungen $\tau_{\lambda s}$ bzw. $\tau_{\mu s}$ gelangt man zu den Querkraften Q_λ und Q_μ . Schließlich liefern die Spannungen σ_λ , σ_μ , $\tau_{\lambda\mu}$ und $\tau_{\mu\lambda}$ noch Momente, da im allgemeinen die Spannungen nicht gleichmäßig über die Schalendicke verteilt sind und bei $1/\varrho \neq 0$ ohnehin eine Verlagerung der neutralen Faser gegenüber der Schalenmittelfläche eintritt. Ebenso wie die Spannungen sind auch die Schnittkräfte positiv in

Richtung der Tangenten und Normalen; die Momente haben dann positiven Drehsinn, wenn die durch sie bewirkten Spannungen an der Schalenoberseite in Richtung der Tangenten zeigen. Alle Schnittgrößen sind auf die Längeneinheit der Koordinatenlinien bezogen.

Beim Übergang zu der als günstig erkannten Asymptotendarstellung (15) vereinfachen sich die Beziehungen (29), (30) und (31) wegen $1/\varrho_x = 1/\varrho_y = 0$ zu

$$N_x = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_x \cdot ds, \quad N_y = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \sigma_y \cdot ds,$$

$$N_{xy} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{xy} \cdot ds, \quad N_{yx} = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} \tau_{yx} \cdot ds.$$

In Bild 6 sind die Spannungen σ_x , σ_y , τ_{xy} und τ_{yx} für ein Element der Tangentialebene im Abstand s von der Schalenmittelfläche eingetragen. Sie weisen definitionsgemäß in Richtung der Tangenten t_x und t_y , deren Koordinatenwinkel δ nicht mit dem von den Linienelementen im Abstand s eingeschlossenen Winkel δ_s übereinstimmt.

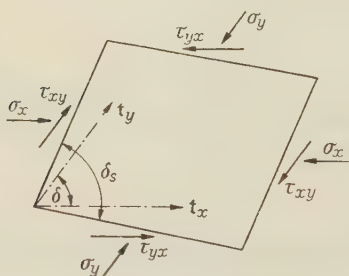


Bild 6

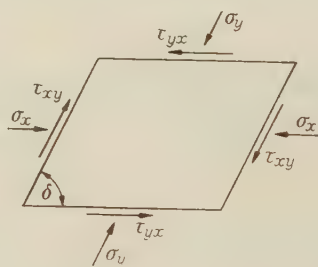


Bild 7

Den funktionalen Einfluß der Schalenkoordinate s auf die Größe der Spannungen entwickelt man zweckmäßig in eine Potenzreihe. Da die Schalendicke bei allen baupraktischen Fällen klein ist gegen die übrigen Schalenabmessungen, genügt es, sich auf den linearen Einfluß in s zu beschränken. Bei den Integrationen der Längs- und Schubkräfte gemäß (29), (30) und (31) verbleiben jeweils wegen

$$\int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} s \, ds = 0$$

nur die von s unabhängigen Spannungsanteile — zahlenmäßig die Spannungen in der Schalenmittelfläche nach Bild 7 — unter dem Integralzeichen.

Für die Spannungsdarstellung nach Bild 7 läßt sich leicht die Gleichheit einander zugehöriger Schubspannungen zeigen; damit führt die Ableitung beider Schubkräfte unter Beschränkung auf den linearen Einfluß in s zu demselben Ergebnis:

$$N_{xy} = N_{yx} \pmod{s^2}.$$

Diese Aussage wird für die folgenden Entwicklungen von größter Bedeutung sein.

Die Momente am Schalenelement werden durch Integration der Produkte aus Spannung und Abstand s von der Mittelfläche über die Schalendicke gewonnen. Sie sind beim hier verfolgten Sonderfall $1/\varrho = 0$ lediglich vom linearen Anteil der Spannungen bestimmt.

Wegen

$$\int_{-\hbar/2}^{+\hbar/2} s \, ds = 0$$

haben nämlich die von s unabhängigen Anteile keinen Einfluß.

Ebensowenig kämen Spannungsglieder zweiter Ordnung zur Geltung, denn auch das Integral

$$\int_{-\hbar/2}^{+\hbar/2} s^3 \, ds$$

verschwindet.

In vielen Fällen ist es zur Erfassung des Gleichgewichtszustandes eines Schalentragerwerkes ausreichend, die Spannungen gleichmäßig verteilt über die Schalendicke anzunehmen. Wie erläutert, verschwinden nunmehr alle Momente und damit auch die Querkkräfte. Es verbleiben nur die drei unbekannten Schnittkräfte

$$N_x, N_y \text{ und } N_{xy},$$

zu deren Auffinden die drei noch vorhandenen Gleichgewichtsbedingungen für die Kraftkomponenten völlig ausreichen. Es ist zur Lösung also nicht erforderlich, auf die elastischen Formänderungen einzugehen; somit kann die Aufgabe als statisch bestimmt bezeichnet werden. Die solchermaßen vereinfachte Schalentheorie hat den Namen Membrantheorie erhalten. Sie weist gegenüber dem Vorzug der einfachen Handhabung den wesentlichen Nachteil auf, daß infolge der Vernachlässigung von Momenten und Querkräften nur die Längs- und Schubkräfte zur Verfügung stehen, um die Schale den vorhandenen Randbedingungen anzupassen. Mathematisch ausgedrückt heißt dies, daß nicht genug Integrationskonstanten bei der Lösung des Gleichungssystems anfallen. Es treten bei der Diskussion von Membranspannungs- und -verformungszuständen noch viele Widersprüche auf, die hier im einzelnen nicht erläutert werden sollen.

Die Biegetheorie vernachlässigt Momente und Querkkräfte nicht. Mit ihr lassen sich alle gegebenen Randbedingungen und Belastungsanordnungen erfassen. Dafür bietet ihre Aufstellung und Auflösung große, oft unüberwindliche Schwierigkeiten. — Die vorliegende Arbeit hat es sich zum Ziel gesetzt, die Biegetheorie der gleichseitigen hyperbolischen Paraboloidschale herzuleiten und Wege zu ihrer Lösung aufzuzeigen. Im Sinne der klassischen Theorie der Baustatik werden die Gleichgewichtsbetrachtungen am unverformten Element angestellt. Darüber hinaus bleiben alle Ableitungen auf die linearen Einflüsse beschränkt, es wird also „Theorie 1. Ordnung“ getrieben.

3.2 Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben

3.21 Die allgemeinen Grundgleichungen

In Bild 8 ist ein Element der Schalenmittelfläche mit allen angreifenden äußeren Belastungen und Schnittkräften dargestellt. Die Kräfte und ihre Differentiale sind nach Größe und Richtung eindeutig und anschaulich durch die Vektorschreibweise festgelegt. Als Parameter sind wie in (15) und (26) die Koordinaten eines kartesischen Koordinatensystems gewählt, so daß der Grundriß des Elementes ein Rechteck mit den Seiten dx und dy ist. Diese Annahme ist keineswegs unumgänglich und schränkt die Gültigkeit der allgemeinen Grundgleichungen nicht ein. Da die vorliegende Arbeit von der Darstellung (15) mit den geradlinigen Asymptoten als Koordinatenlinien ausgeht, sind hier

die Bezeichnungen x und y eingeführt; ferner sollen zur Vereinfachung die Differentialquotienten wie folgt geschrieben werden:

$$\frac{\partial (\quad)}{\partial x} = (\quad)' \quad \text{und} \quad \frac{\partial (\quad)}{\partial y} = (\quad)''.$$

Für die Darstellung (15) gibt Bild 8 die tatsächlich vorhandene windschiefe Form des Mittelfächenelementes wieder. Ist das Element im allgemeinen Fall gekrümmt, dann bleibt Bild 8 mit den in der Schalentheorie zulässigen Vereinfachungen ebenfalls gültig. —

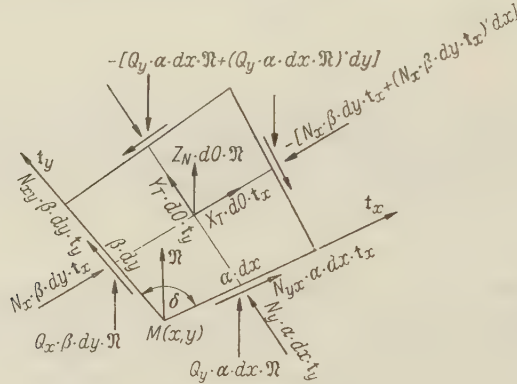


Bild 8

Die äußeren Lasten seien zunächst auf die Einheit der Schalenmittelfläche bezogen. Bildet man die vektorielle Summe aller Kräfte, so gelangt man zu der Beziehung

$$-(N_x \cdot \beta \cdot dy \cdot t_x)' dx - (N_y \cdot \alpha \cdot dx \cdot t_y)' dy - (N_{xy} \cdot \beta \cdot dy \cdot t_y)' dx - (N_{yx} \cdot \alpha \cdot dx \cdot t_x)' dy - (Q_x \cdot \beta \cdot dy \cdot n)' dx - (Q_y \cdot \alpha \cdot dx \cdot n)' dy + (X_T \cdot t_x + Y_T \cdot t_y + Z_N \cdot n) \cdot dO = 0.$$

Nach Division durch $dx \cdot dy$ liegt die allgemeine Vektorgleichung des Schalenelementes gegen Verschieben vor:

$$\begin{aligned} & (N_x \cdot \beta \cdot t_x)' + (N_y \cdot \alpha \cdot t_y)' + (N_{xy} \cdot \beta \cdot t_y)' + (N_{yx} \cdot \alpha \cdot t_x)' \\ & + (Q_x \cdot \beta \cdot n)' + (Q_y \cdot \alpha \cdot n)' = (X_T \cdot t_x + Y_T \cdot t_y + Z_N \cdot n) \cdot \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}. \end{aligned} \quad (32)$$

Führt man auf der linken Seite ein

$$t_x = \frac{1}{\alpha} r' \quad \text{und} \quad t_y = \frac{1}{\beta} r'',$$

dann wird

$$\begin{aligned} & \left(N_x \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot r' \right)' + \left(N_y \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot r'' \right)' + (N_{xy} \cdot r')' + (N_{yx} \cdot r'')' + (Q_x \cdot \beta \cdot n)' \\ & + (Q_y \cdot \alpha \cdot n)' = (X_T \cdot t_x + Y_T \cdot t_y + Z_N \cdot n) \cdot \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4} \end{aligned} \quad (32a)$$

und nach der Differentiation

$$\begin{aligned} & N_x' \cdot \frac{\beta}{\alpha} \cdot r' + N_x \left(\frac{\beta}{\alpha} \cdot r'' + \frac{\alpha \beta' - \alpha' \beta}{\alpha^2} r' \right) + N_y \cdot \frac{\alpha}{\beta} \cdot r'' + N_y \left(\frac{\alpha}{\beta} \cdot r''' + \frac{\beta \alpha' - \alpha \beta'}{\beta^2} r'' \right) \\ & + N_{xy}' \cdot r' + N_{xy} \cdot r'' + N_{yx}' \cdot r'' + N_{yx} \cdot r''' + Q_x' \cdot \beta \cdot n + Q_x (\beta \cdot n' + \beta' \cdot n) \\ & + Q_y' \cdot \alpha \cdot n + Q_y (\alpha \cdot n' + \alpha' \cdot n) = (X_T \cdot t_x + Y_T \cdot t_y + Z_N \cdot n) \sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}. \end{aligned} \quad (33)$$

Gleichung (33) ist wie jede Vektorgleichung drei skalaren Beziehungen gleichwertig. Dabei ist es willkürlich, auf welche drei linear unabhängige Vektoren die Vektorgleichung (33) bezogen wird. Hier soll auf die Richtungen $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$ und $\mathfrak{N}$ projiziert werden. Dazu multipliziert man (33) nacheinander skalar mit den Einheitsvektoren $\mathbf{t}_x$, $\mathbf{t}_y$ und $\mathfrak{N}$. Zur Durchführung der Rechnung benötigt man folgende Skalarprodukte:

$$\begin{aligned} \text{aus } \mathbf{r}'^2 = \alpha^2 \text{ wird } \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = \alpha\alpha' \text{ oder} & \quad \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{r}'' = \alpha', \\ \text{ebenso} & \quad \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{r}'' = \beta', \\ & \quad \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{r}' = \alpha', \\ & \quad \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{r}' = \beta'; \end{aligned} \quad (34)$$

$\mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' + \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' = 2\gamma\gamma'$ wird zu

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' \cdot \mathbf{r}'' = 2\gamma\gamma' - \alpha\alpha' \text{ oder } \mathbf{t}_y \cdot \mathbf{r}'' = \frac{2\gamma}{\beta} \cdot \gamma' - \frac{\alpha}{\beta} \cdot \alpha', \\ \text{ebenso } \mathbf{t}_x \cdot \mathbf{r}'' = \frac{2\gamma}{\alpha} \cdot \gamma' - \frac{\beta}{\alpha} \cdot \beta'. \end{aligned} \quad (35)$$

Berücksichtigt man weiter (9 a—c), dann ist die Projektion auf $\mathbf{t}_x$

$$\begin{aligned} N_x' \cdot \beta + N_x \cdot \beta' + N_y \cdot \frac{\gamma^2}{\beta} + N_y \left(-\beta' + \frac{2\gamma\gamma'}{\beta} + \frac{\gamma^2\alpha'}{\alpha\beta} - \frac{\gamma^2\beta'}{\beta^2} \right) + N_{xy}' \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha} \\ + (N_{xy} + N_{yx})\alpha' + N_{yx} \cdot \alpha + Q_x \cdot \beta \cdot \mathfrak{N}' \cdot \mathbf{t}_x + Q_y \cdot \alpha \cdot \mathfrak{N}' \cdot \mathbf{t}_x \\ = \left(X_T + Y_T \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} \right) \sqrt{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4}. \end{aligned} \quad (36)$$

Die Projektion auf $\mathbf{t}_y$ führt zur zweiten Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} N_y' \cdot \alpha + N_y \cdot \alpha' + N_x' \cdot \frac{\gamma^2}{\alpha} + N_x \left(-\alpha' + \frac{2\gamma\gamma'}{\alpha} + \frac{\gamma^2\beta'}{\alpha\beta} - \frac{\gamma^2\alpha'}{\alpha^2} \right) + N_{yx}' \cdot \frac{\gamma^2}{\beta} \\ + (N_{xy} + N_{yx})\beta' + N_{xy}' \cdot \beta + Q_y \cdot \alpha \cdot \mathfrak{N}' \cdot \mathbf{t}_y + Q_x \cdot \beta \cdot \mathfrak{N}' \cdot \mathbf{t}_y \\ = \left(Y_T + X_T \frac{\gamma^2}{\alpha\beta} \right) \sqrt{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4}. \end{aligned} \quad (37)$$

Endlich lautet die dritte Gleichgewichtsbedingung mit (14a—c):

$$\begin{aligned} N_x \cdot \frac{\beta}{\alpha} L + N_y \cdot \frac{\alpha}{\beta} N + (N_{xy} + N_{yx}) M + Q_x' \cdot \beta + Q_x \cdot \beta' + \\ + Q_y' \cdot \alpha + Q_y \cdot \alpha' = Z_N \sqrt{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4} \end{aligned} \quad (38)$$

3.22 Die Gleichgewichtsbedingungen für die auf die Asymptoten bezogene hyperbolische Paraboloidschale

Aus den allgemeinen Grundgleichungen des Schalenelementes sollen nun die drei Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben für das auf die Asymptoten bezogene hyperbolische Paraboloid abgeleitet werden. Wie in 3.1 gezeigt wurde, darf für diese spezielle Darstellung $N_{xy} = N_{yx}$ gesetzt werden. — Führt man die in Abschnitt 2.2 gefundenen Beziehungen (17) bis (25) in (36) bis (38) ein und berücksichtigt ferner

$$\mathfrak{N}' = \frac{1}{R^3}(xy; -T^2; -ax), \quad (39a)$$

$$\mathfrak{N} = \frac{1}{R^3}(-S^2; xy; -ay), \quad (39b)$$

$$\mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{t}_x = 0, \quad (40a)$$

$$\mathfrak{N}' \cdot \mathfrak{t}_y = -\frac{a}{SR}, \quad (40b)$$

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{t}_x = -\frac{a}{TR}, \quad (40c)$$

$$\mathfrak{N} \cdot \mathfrak{t}_y = 0, \quad (40d)$$

dann erhält man die drei Gleichgewichtsbedingungen gegen das Verschieben des Schalenelementes

$$\begin{aligned} N_x \frac{x}{aS} + N_x' \frac{S}{a} + N_y \frac{xy^2}{aS^2T^2} + N_y' \frac{xy}{aS} + 2N_{xy} \frac{y}{aT} \\ + N_{xy}' \frac{xy}{aT} + N_{xy} \frac{T}{a} - Q_y \frac{1}{R} = \left(X_T + Y_T \frac{xy}{ST} \right) \frac{R}{a}, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\begin{aligned} N_y \frac{y}{aT} + N_y' \frac{T}{a} + N_x \frac{x^2y}{aS^2T} + N_x' \frac{xy}{aT} + 2N_{xy} \frac{x}{aS} \\ + N_{xy}' \frac{S}{a} + N_{xy} \frac{xy}{aS} - Q_x \frac{1}{R} = \left(Y_T + X_T \frac{xy}{ST} \right) \frac{R}{a}, \end{aligned} \quad (42)$$

$$N_{xy} \frac{2}{R} + Q_x \frac{x}{aS} + Q_x' \frac{S}{a} + Q_y \frac{y}{aT} + Q_y' \frac{T}{a} = Z_N \frac{R}{a}. \quad (43)$$

Verwendet man anstelle der tangentialen und normalen Flächenbelastungen X_T , Y_T und Z_N die auf die Grundrißprojektion bezogenen Belastungen $\bar{X}$, $\bar{Y}$ und $\bar{Z}$ in Richtung der Koordinatenachsen, so ändern sich die Belastungsglieder wie folgt:

$$\bar{X} \frac{a}{T} + \bar{Z} \frac{y}{T}, \quad (41a)$$

$$\bar{Y} \frac{a}{S} + \bar{Z} \frac{x}{S}, \quad (42a)$$

$$\frac{a}{R} \left(-\bar{X} \frac{y}{a} - \bar{Y} \frac{x}{a} + \bar{Z} \right). \quad (43a)$$

3.3 Die Gleichgewichtsbedingungen gegen Verdrehen

3.31 Die allgemeinen Grundgleichungen

Neben den im Abschnitt 3.2 behandelten und in Bild 8 gemeinsam mit den äußeren Belastungen dargestellten Schnittkräften N_x , N_y , N_{xy} , N_{yx} , Q_x und Q_y greifen an den Schnittträndern des Schalenelementes noch Momente an. Der resultierende Momentenvektor in einem Schnitt wird in Richtung der Tangenten zerlegt; die Komponenten sind wiederum auf die Einheit der Schnittlängen bezogen. Ihr Drehsinn entspricht dem einer

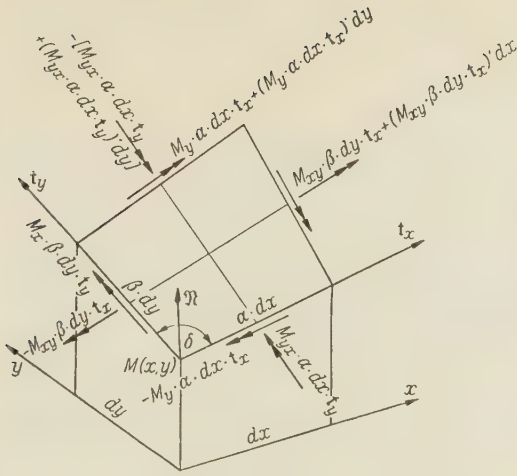


Bild 9

Rechtsschraube. Positiv bezeichnet werden sie dann, wenn sie an der Schalenoberseite positive Längs- und Schubspannungen im Sinne der Definitionen des Abschnittes 3.1 erzeugen, Bild 9.

Zur vollständigen Momentensumme für das in Bild 8 und 9 dargestellte Schalenelement gehören auch die Beiträge der Schnittkräfte. Während die N_x und N_y keine Momentenanteile liefern, bilden die Schubkräfte und Querkräfte jeweils Kräftepaare. Ihre Differentiale können allerdings außer acht bleiben, da deren Beiträge von höherer Ordnung klein sind. — Die Kräftepaare werden nach Betrag und Richtung durch das Vektorprodukt (Kraft $\times$ Hebelarm) beschrieben.

Insgesamt liefern die Schnittkräfte

$$N_{yx} \cdot \alpha \cdot dx \cdot \beta \cdot dy (\mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y) + N_{xy} \cdot \beta \cdot dy \cdot \alpha \cdot dx (\mathbf{t}_y \times \mathbf{t}_x) + Q_x \cdot \beta \cdot dy \cdot \alpha \cdot dx (\mathfrak{N} \times \mathbf{t}_x) + Q_y \cdot \alpha \cdot dx \cdot \beta \cdot dy (\mathfrak{N} \times \mathbf{t}_y). \quad (44a)$$

Die Momente nach Bild 9 ergeben eine Vektorsumme von

$$(M_{xy} \cdot \beta \cdot dy \cdot \mathbf{t}_x)' dx - (M_x \cdot \beta \cdot dy \cdot \mathbf{t}_y)' dx - (M_{yx} \cdot \alpha \cdot dx \cdot \mathbf{t}_y)' dy + (M_y \cdot \alpha \cdot dx \cdot \mathbf{t}_x)' dy. \quad (44b)$$

Es sei erinnert, daß

$$(\mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y) = -(\mathbf{t}_y \times \mathbf{t}_x) = \frac{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}}{\alpha \beta} \mathfrak{N} = \sin \delta \cdot \mathfrak{N}, \quad (45a)$$

$$\mathfrak{N} \times \mathbf{t}_x = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}} (\mathbf{t}_x \times \mathbf{t}_y) \times \mathbf{t}_x = \mathbf{t}_y \frac{1}{\sin \delta} - \mathbf{t}_x \cdot \operatorname{ctg} \delta, \quad (45b)$$

$$\mathfrak{N} \times \mathbf{t}_y = -\mathbf{t}_x \frac{1}{\sin \delta} + \mathbf{t}_y \cdot \operatorname{ctg} \delta. \quad (45c)$$

Nach Division durch $dx \cdot dy$ liegt die allgemeine Vektorgleichung des Schalenelementes gegen Verdrehen vor:

$$\begin{aligned} & - (M_x \cdot \beta \cdot \mathbf{t}_y)' + (M_y \cdot \alpha \cdot \mathbf{t}_x)' + (M_{xy} \cdot \beta \cdot \mathbf{t}_x)' - (M_{yx} \cdot \alpha \cdot \mathbf{t}_y)' \\ & + (N_{yx} - N_{xy}) \frac{\alpha \beta}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}} \mathfrak{N} + Q_x \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}} (\alpha^2 \beta^2 \mathbf{t}_y - \alpha \beta \gamma^2 \cdot \mathbf{t}_x) \\ & + Q_y \frac{1}{\sqrt{\alpha^2 \beta^2 - \gamma^4}} (-\alpha^2 \beta^2 \cdot \mathbf{t}_x + \alpha \beta \gamma^2 \cdot \mathbf{t}_y) = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Nun führt man $f_x = \frac{1}{\alpha} r'$ und $f_y = \frac{1}{\beta} r'$ ein und differenziert:

$$\begin{aligned} & -M_x' \cdot r' - M_x \cdot r'' + M_y' \cdot r' + M_y \cdot r'' + M_{xy}' \frac{\beta}{\alpha} \cdot r' + M_{xy} \left(\frac{\beta}{\alpha} r'' + r' \frac{\alpha\beta' - \alpha'\beta}{\alpha^2} \right) \\ & - M_{yx}' \frac{\alpha}{\beta} \cdot r' - M_{yx} \left(\frac{\alpha}{\beta} r'' + \frac{\beta\alpha' - \alpha\beta'}{\beta^2} r' \right) + (N_{yx} - N_{xy}) \sqrt{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4} \cdot \mathfrak{N} \\ & + Q_x \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4}} (\alpha^2\beta \cdot r' - \beta\gamma^2 \cdot r') + Q_y \frac{1}{\sqrt{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4}} (-\alpha\beta^2 \cdot r' + \alpha\gamma^2 \cdot r') = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Aus (47) lassen sich drei skalare Gleichgewichtsbedingungen gewinnen. Als Beispiel sei die Normalengleichung abgeleitet, die das Gleichgewicht gegen Verdrehen um $\mathfrak{N}$ ausdrückt. Mit (14a) bis (14c) wird nach Multiplikation mit $\mathfrak{N}$

$$M(M_y - M_x) + M_{xy} \frac{\beta}{\alpha} L - M_{yx} \frac{\alpha}{\beta} N + (N_{yx} - N_{xy}) \sqrt{\alpha^2\beta^2 - \gamma^4} = 0. \quad (48)$$

3.32 Die Gleichgewichtsbedingungen für die auf die Asymptoten bezogene hyperbolische Paraboloidschale

Mit $L = N = 0$ verkürzt sich die Normalengleichung (48) auf zwei Glieder, die Differenzen fast gleich großer Werte enthalten:

$$\frac{1}{R}(M_y - M_x) + \frac{R}{a}(N_{yx} - N_{xy}) = 0. \quad (49)$$

Diese Gleichgewichtsbeziehung führt allerdings zu Widersprüchen, wenn man die in Abschnitt 3.1 getroffene Vereinfachung $N_{xy} = N_{yx}$ beibehalten will.

Während in Abschnitt 3.2 die Vektorgleichung auf die Richtungen f_x und f_y projiziert wurde, erscheint es hier zweckmäßig, als Bezugsachsen die Koordinatenachsen zu wählen. Mit (21a, b) erhält man aus (46) für die Projektion auf Ox

$$M_y' + M_{xy}' \frac{S}{T} + M_{xy} \left(\frac{S}{T} \right)' - Q_x \frac{xyS}{a^2 R} - Q_y \frac{S^2 T}{a^2 R} = 0 \quad (50)$$

und entsprechend für die Projektion auf Oy

$$-M_x' - M_{yx}' \frac{T}{S} - M_{yx} \left(\frac{T}{S} \right)' + Q_x \frac{ST^2}{a^2 R} + Q_y \frac{xyT}{a^2 R} = 0. \quad (51)$$

Aus (50) und (51) bildet man

$$M_y' + M_{xy}' \frac{S}{T} + M_{xy} \frac{x}{ST} - Q_x \frac{xyS}{a^2 R} - Q_y \frac{S^2 T}{a^2 R} = 0, \quad (52)$$

$$M_x' + M_{yx}' \frac{T}{S} + M_{yx} \frac{y}{ST} - Q_y \frac{xyT}{a^2 R} - Q_x \frac{ST^2}{a^2 R} = 0. \quad (53)$$

3.4 Die Ausgangsgleichungen für die Biegetheorie

Zur Bestimmung der unbekannten Schnittgrößen sind bisher die sechs Gleichgewichtsbedingungen bekannt geworden. Eine von ihnen, die Normalengleichung (49), kann und muß wegen der näherungsweisen Gleichsetzung der Schubkräfte als überzählig betrachtet

werden; sie wird ohnehin durch geringfügige Änderung der später gefundenen Schnittgrößen zu erfüllen sein. Es stehen damit die Gleichungen (41), (42), (43), (52) und (53) zur Verfügung. Sie reichen natürlich nicht aus, um die noch vorhandenen neun Unbekannten

$$N_x, N_y, N_{xy} = N_{yx}, Q_x, Q_y, M_x, M_y, M_{xy} \text{ und } M_{yx}$$

zu ermitteln. Die vorliegende Aufgabe ist demnach als statisch unbestimmt zu bezeichnen. Um die fehlenden Gleichungen zu erhalten, müssen die Stoffgesetze herangezogen und Kräfte und Momente durch die elastischen Verformungen ausgedrückt werden. Die Aufstellung der Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen der Paraboloidschale, d. h. eines Zusammenhanges zwischen den Schnittgrößen einerseits und den Verschiebungen u, v, w der Mittelfläche und ihren Ableitungen andererseits, bleibt späteren Abschnitten vorbehalten. Es sei vorweggenommen, daß bei der üblichen Vernachlässigung der durch die Querkräfte erzeugten Verformungen (die Normalen zur Mittelfläche sollen auch nach der Verformung der Schale normal zur neuen Mittelfläche sein) sieben Verschiebungsgleichungen zur Verfügung stehen, die mit den fünf Gleichgewichtsbedingungen zusammen zwölf Gleichungen ergeben. Demgegenüber stehen neun unbekannte Schnittgrößen und drei unbekannte Verschiebungen.

Gewöhnlich gelingt es, die Querkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen zu eliminieren. Hier bildet man aus (52) und (53)

$$Q_x = \frac{1}{R} \left(-\frac{x^2 y}{S^2 T} M_{xy} + \frac{y}{T} M_{yx} + S M_x' - \frac{xy}{S} M_y' - \frac{xy}{T} M_{xy}' + T M_{yx}' \right), \quad (54)$$

$$Q_y = \frac{1}{R} \left(-\frac{xy^2}{S T^2} M_{yx} + \frac{x}{S} M_{xy} + T M_y' - \frac{xy}{T} M_x' - \frac{xy}{S} M_{yx}' + S M_{xy}' \right) \quad (55)$$

und kann die Querkräfte sowie ihre Ableitungen in (41) bis (43) einsetzen. Diese Gleichungen enthalten nur noch die sieben Unbekannten N und M , die sich alle durch die drei Verschiebungen u, v, w und deren Ableitungen ausdrücken lassen. Ist das gelungen, dann hat man die Aufgabe zurückgeführt auf die Lösung eines Systems von drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen.

4. Die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen am schiefwinkligen Flächenelement

4.1 Grundlagen

Zwei beliebige Koordinatenlinien $\lambda = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$ auf einer Schalenmittelfläche $r = r(\lambda, \mu)$ schließen miteinander den Winkel δ ein, der im allgemeinen von 90° verschieden ist. Durch $\lambda = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$ sowie die differential benachbarten Koordinatenlinien wird ein parallelogrammartig begrenztes Element aus der Fläche herausgeschnitten. Es soll die Dicke „ t “ haben, Bild 10.

Die Seitenlängen des Elementes sind gemäß 2.1 $\alpha \cdot d\lambda$ und $\beta \cdot d\mu$. Die an den Schnitt-rändern angreifenden Spannungen werden jeweils in die Richtungen λ und μ zerlegt. Für die Schubspannungen $\tau_{\lambda\mu}$ gilt unter dieser Voraussetzung der Satz von der Gegengleichheit einander zugeordneter Schubspannungen, wie sich durch Bildung des Momentengleichgewichts leicht zeigen läßt. — Alle Spannungen sind auf die Einheit der

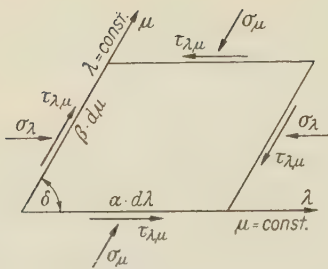


Bild 10

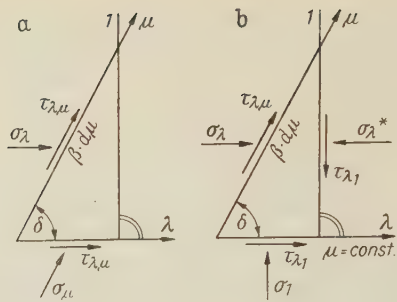


Bild 11

Seitenlängen bezogen. Sie zählen positiv, wenn sie an den Rändern $\lambda = \text{const}$ und $\mu = \text{const}$ in Richtung der positiven Koordinatenlinien weisen.

4.2 Die Dehnungen ε_λ und ε_μ in Richtung der Koordinatenlinien

Zur Bildung einer Beziehung für die Dehnung ε_λ in Abhängigkeit von den Spannungen σ_λ , σ_μ und $\tau_{\lambda\mu}$ wird das in Bild 10 gezeigte Flächenelement rechtwinklig zur Koordinatenlinie $\mu = \text{const}$ geschnitten, Bild 11 a.

Führt man im Schnitt $\mu = \text{const}$ rechtwinklige Spannungen ein, dann ergibt sich:

$$\sigma_1 = \sigma_\mu \cdot \sin \delta, \quad (56a)$$

$$\tau_{\lambda 1} = \tau_{\lambda\mu} + \sigma_\mu \cdot \cos \delta. \quad (56b)$$

Das Gleichgewicht der Schnittkräfte in Richtung λ liefert in dem um 90° gedrehten Schnitt die Normalspannung σ_{λ}^* , Bild 11 b.

$$\sigma_\lambda \cdot \beta \cdot d\mu + \tau_{\lambda\mu} \cdot \beta \cdot d\mu \cdot \cos \delta + \tau_{\lambda 1} \cdot \beta \cdot d\mu \cdot \cos \delta = \sigma_{\lambda}^* \cdot \beta \cdot d\mu \cdot \sin \delta,$$

$$\sigma_{\lambda}^* = \frac{\sigma_\lambda}{\sin \delta} + \tau_{\lambda\mu} \cdot \text{ctg} \delta + (\tau_{\lambda\mu} + \sigma_\mu \cdot \cos \delta) \text{ctg} \delta,$$

$$\sigma_{\lambda}^* = \frac{\sigma_\lambda}{\sin \delta} + \sigma_\mu \frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta} + 2 \tau_{\lambda\mu} \cdot \text{ctg} \delta.$$

Aus den Spannungen σ_1 und σ_{λ}^* am rechtwinkligen Element läßt sich nunmehr nach dem Hookeschen Gesetz für zweiachsige Beanspruchung die Dehnung ε_λ angeben:

$$\varepsilon_\lambda = \frac{1}{E} (-\sigma_{\lambda}^* + \nu \cdot \sigma_1),$$

$$\varepsilon_\lambda = -\frac{1}{E} \left[\sigma_\lambda \cdot \frac{1}{\sin \delta} + \sigma_\mu \left(\frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta} - \nu \cdot \sin \delta \right) + 2 \tau_{\lambda\mu} \cdot \text{ctg} \delta \right]. \quad (57)$$

Mit ν ist die Querdehnzahl bezeichnet. ε_λ ist positiv, wenn die Seite $\alpha d\lambda$ (Bild 10) eine Verlängerung erfährt.

In der gleichen Weise gelangt man zu dem Ausdruck für die Dehnung ε_μ . Diesmal wird durch einen Schnitt rechtwinklig zur Koordinatenachse $\lambda = \text{const}$ ein Element abgetrennt (Bild 12), für das sich die Spannungen

$$\sigma_2 = \sigma_\lambda \cdot \sin \delta$$

und

$$\sigma_\mu^* = \frac{\sigma_\mu}{\sin \delta} + \sigma_\lambda \cdot \frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta} + 2 \tau_{\lambda\mu} \cdot \text{ctg} \delta$$

ergeben.

Unter Benutzung des Hookeschen Gesetzes wird

$$\left| \varepsilon_\mu = -\frac{1}{E} \left[\sigma_\mu \cdot \frac{1}{\sin \delta} + \sigma_\lambda \left(\frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta} - \nu \cdot \sin \delta \right) + 2 \tau_{\lambda\mu} \cdot \operatorname{ctg} \delta \right] \right| \quad (58)$$

Die Dehnungen ε_λ und ε_μ sind beim schiefwinkligen Element mithin nicht nur von den Längsspannungen σ_λ und σ_μ , sondern auch von den Schubspannungen abhängig. Wird $\delta = 90^\circ$, so ergeben sich mit Bild 13 die bekannten Hookeschen Gesetze:

$$\varepsilon_x = -\frac{1}{E} (\sigma_x - \nu \cdot \sigma_y), \quad \varepsilon_y = -\frac{1}{E} (\sigma_y - \nu \cdot \sigma_x).$$

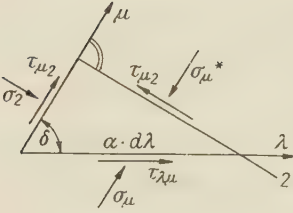


Bild 12

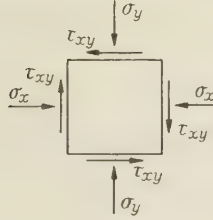


Bild 13

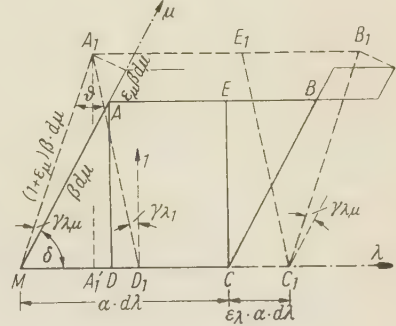


Bild 14

4.3 Die Gleitung $\gamma_{\lambda\mu}$

Neben den Dehnungen ε_λ und ε_μ erfährt das schiefwinklige Element noch eine Winkeländerung um das Maß $\gamma_{\lambda\mu}$. Offenbar benötigt man nun zur Aufstellung einer Beziehung für $\gamma_{\lambda\mu}$ in Abhängigkeit von σ_λ , σ_μ und $\tau_{\lambda\mu}$ das für das rechtwinklige Element nach Bild 13 gültige Gesetz

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{2(1+\nu)}{E} \cdot \tau_{xy}. \quad (59)$$

In Bild 14 ist das schiefwinklige Element $MABC$ vor und nach der Verformung dargestellt. Ein eingeschriebenes rechtwinkliges Element $AECD$ geht nach der Verformung in das Parallelogramm $A_1E_1C_1D_1$ über, wobei es eine Gleitung γ_{λ_1} mitmacht. Die Seitenlängen der betrachteten Figuren sind bekannt und insbesondere nach der Verformung durch die zugehörigen Dehnungen bestimmt. So erhält man für das Dreieck MA_1D_1 die drei Größen

$$\overline{MD}_1 = MD(1 + \varepsilon_\lambda) = \beta d\mu \cdot \cos \delta (1 + \varepsilon_\lambda),$$

$$\overline{MA}_1 = \beta d\mu (1 + \varepsilon_\mu)$$

und schließlich mit Verwendung von (56b)

$$\gamma_{\lambda_1} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{\lambda_1} = \frac{2(1+\nu)}{E} (\tau_{\lambda\mu} + \sigma_\mu \cdot \cos \delta). \quad (60)$$

Nach dem Sinussatz ist

$$\frac{\sin \vartheta}{\sin (90 - \gamma_{\lambda_1})} = \frac{\overline{MD}_1}{\overline{MA}_1} = \cos \delta \frac{1 + \varepsilon_\lambda}{1 + \varepsilon_\mu}$$

und damit

$$\sin \vartheta = \cos \delta \frac{1 + \varepsilon_\lambda}{1 + \varepsilon_\mu} \cos \gamma_{\lambda_1}. \quad (61)$$

Weiterhin gilt

$$\gamma_{\lambda\mu} = 90^\circ - (\delta + \vartheta - \gamma_{\lambda_1}). \quad (62)$$

Die Verzerrungen ε_λ , ε_μ , $\gamma_{\lambda\mu}$ und γ_{λ_1} sind bei allen baupraktischen Fällen als sehr klein gegen „1“ anzusehen und können daher nach Entwicklung in Potenzreihen in den Gliedern zweiter und höherer Ordnung vernachlässigt werden. In der Folge gelten also alle Gleichungen mit der Einschränkung „modulo ε^2 “, kurz mod ε^2 , wenn man unter ε eine beliebige kleine Größe erster Ordnung versteht. Mit (62) wird

$$\begin{aligned} \sin \gamma_{\lambda\mu} &= \cos(\delta + \vartheta - \gamma_{\lambda_1}) \\ &= (\cos \delta \cdot \cos \vartheta - \sin \delta \cdot \sin \vartheta) \cos \gamma_{\lambda_1} + (\sin \delta \cdot \cos \vartheta + \cos \delta \cdot \sin \vartheta) \sin \gamma_{\lambda_1} \end{aligned}$$

oder vereinfacht

$$\gamma_{\lambda\mu} = (\cos \delta \cdot \cos \vartheta - \sin \delta \cdot \sin \vartheta) + (\sin \delta \cdot \cos \vartheta + \cos \delta \cdot \sin \vartheta) \gamma_{\lambda_1}. \quad (63)$$

Die Gleichung (61) läßt sich schreiben:

$$\sin \vartheta = \cos \delta (1 + \varepsilon_\lambda) (1 - \varepsilon_\mu) = \cos \delta (1 + \varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu). \quad (64)$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} \cos \vartheta &= \sqrt{1 - \cos^2 \delta (1 + 2\varepsilon_\lambda - 2\varepsilon_\mu)} = \sqrt{1 - \cos^2 \delta} \cdot \sqrt{1 - \frac{2 \cos^2 \delta}{1 - \cos^2 \delta} (\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu)}, \\ \cos \vartheta &= \sin \delta \left[1 - \frac{\cos^2 \delta}{\sin^2 \delta} (\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu) \right]. \end{aligned} \quad (65)$$

Mit (63), (64) und (65) gewinnt man

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda\mu} &= \left\{ \sin \delta \cdot \cos \delta \left[1 - \frac{1}{\tan^2 \delta} (\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu) \right] - \sin \delta \cdot \cos \delta (1 + \varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu) \right\} \\ &\quad + \left\{ \sin^2 \delta \left[1 - \frac{1}{\tan^2 \delta} (\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu) \right] + \cos^2 \delta (1 + \varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu) \right\} \cdot \gamma_{\lambda_1}, \\ \gamma_{\lambda\mu} &= - \frac{\cos^3 \delta}{\sin \delta} (\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu) - \sin \delta \cdot \cos \delta (\varepsilon_\lambda - \varepsilon_\mu) + \gamma_{\lambda_1}. \end{aligned}$$

Nach einigen Umformungen erhält man

$$\gamma_{\lambda\mu} = \frac{\varepsilon_\mu - \varepsilon_\lambda}{\tan \delta} + \gamma_{\lambda_1}.$$

Es werden nun die Gleichungen (57), (58) und (60) eingesetzt:

$$\begin{aligned} \gamma_{\lambda\mu} &= \frac{1}{E \tan \delta} \left\{ \frac{\sigma_\lambda}{\sin \delta} + \sigma_\mu \left(\frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta} - \nu \cdot \sin \delta \right) - \frac{\sigma_\mu}{\sin \delta} - \sigma_\lambda \left(\frac{\cos^2 \delta}{\sin \delta} - \nu \sin \delta \right) \right\} \\ &\quad + \frac{2(1+\nu)}{E} (\tau_{\lambda\mu} + \sigma_\mu \cdot \cos \delta). \end{aligned}$$

Damit findet man für die Gleitung die einfache Beziehung

$$\gamma_{\lambda\mu} = \frac{1+\nu}{E} [2\tau_{\lambda\mu} + \cos \delta (\sigma_\lambda + \sigma_\mu)]. \quad (66)$$

Die Gleitung wird positiv gerechnet, wenn sich der Winkel δ gemäß Bild 14 vergrößert. Auch bei der dritten Verzerrungsgröße liegt also eine Abhängigkeit von σ_λ , σ_μ und $\tau_{\lambda\mu}$ vor.

Die Elastizitäts- oder Stoffbeziehungen (57), (58) und (66) lassen sich leicht nach den Spannungen auflösen:

$$\sigma_{\lambda} = - \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta} [\sin \delta (\epsilon_{\lambda} + \nu \cdot \epsilon_{\mu}) + \cos \delta \cdot \gamma_{\lambda\mu}], \quad (67 a)$$

$$\sigma_{\mu} = - \frac{E}{1 - \nu^2} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta} [\sin \delta (\epsilon_{\mu} + \nu \cdot \epsilon_{\lambda}) + \cos \delta \cdot \gamma_{\lambda\mu}], \quad (67 b)$$

$$\tau_{\lambda\mu} = \frac{E}{2(1 - \nu^2)} \cdot \frac{1}{\sin^2 \delta} [(2 - (\nu + 1) \sin^2 \delta) \cdot \gamma_{\lambda\mu} + (1 + \nu) \sin \delta \cdot \cos \delta (\epsilon_{\lambda} + \epsilon_{\mu})]. \quad (67 c)$$

Für $\delta = \pi/2$ gehen die Gleichungen in die bekannten Hookeschen Gesetze für das rechtwinklig begrenzte Element über.

5. Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen für hyperbolische Paraboloidschale

5.1 Grundlagen

Der Formänderungszustand einer Schale kann nicht nur durch die Verzerrungen beschrieben werden, sondern auch durch Angabe der elastischen Verschiebung eines jeden ihrer Punkte. Die Gesamtverschiebung läßt sich als gerichtete Größe vektoriell darstellen und in drei beliebige Komponenten zerlegen. Offenbar müssen Verzerrungen und Verschiebungen rein geometrisch miteinander verknüpft sein, da man mit beiden ein und denselben Zustand zu kennzeichnen vermag. In diesem Abschnitt soll für die auf die Asymptoten bezogene hyperbolische Paraboloidschale versucht werden, die Verzerrungen durch die Verschiebungen und deren Ableitungen auszudrücken. Es wird dabei wie üblich vorausgesetzt, daß die Verschiebungen selbst klein gegen die Schalenabmessungen, die ersten Ableitungen aber klein gegen „1“ sind. Entsprechend dem Abschnitt 4.3 gelten die Gleichheitszeichen stets unter der Einschränkung „mod ϵ^2 “. Insbesondere darf von folgenden Näherungen Gebrauch gemacht werden:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 + \epsilon} &\approx 1 - \epsilon, & \frac{1}{1 - \epsilon} &\approx 1 + \epsilon, \\ \sqrt{1 + \epsilon} &\approx 1 + \frac{\epsilon}{2}, & \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon}} &\approx 1 - \frac{\epsilon}{2}, \\ \sqrt[q]{(1 + \epsilon)^p} &= (1 + \epsilon)^{p/q} \approx 1 + \frac{p}{q} \cdot \epsilon, \\ \frac{1}{\sqrt[q]{(1 + \epsilon)^p}} &= (1 + \epsilon)^{-p/q} \approx 1 - \frac{p}{q} \cdot \epsilon. \end{aligned} \quad (68)$$

5.2 Die Verschiebungen werden in Richtung der Koordinatenachsen gemessen

Der Verschiebungsvektor $\mathbf{v}$ wird in Richtung der Koordinatenachsen des hyperbolischen Paraboloides gemäß der Darstellung (15) zerlegt, wie es Bild 15 verdeutlicht. $\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$ sind die Komponenten in Richtung Ox , Oy bzw. Oz , $(\bar{\cdot})'$ und $(\bar{\cdot})$ ihre partiellen Ableitungen nach x und y .

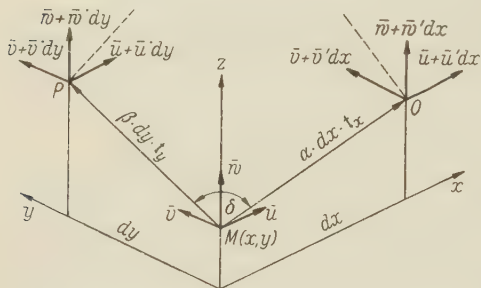


Bild 15

Zur Bestimmung der ausgezeichneten Dehnungen ϵ_x und ϵ_y gilt es, die Seitenlängen $(r_O - r_M)$ bzw. $(r_P - r_M)$ vor und nach der Verformung festzulegen. Man erkennt aus Bild 15, daß die Ausgangslängen

$$\begin{aligned} |r_O - r_M| &= \alpha \cdot dx, \\ |r_P - r_M| &= \beta \cdot dy \end{aligned} \quad (69a, b)$$

betragen. Wenn die Punkte nach der Verformung mit dem Index 1 bezeichnet werden, erhält man

$$(r_O - r_M)_1 = \alpha \cdot dx \cdot \epsilon_x + (\bar{u}' \cdot dx; \bar{v}' \cdot dx; \bar{w}' \cdot dx).$$

Nach vollständiger Zerlegung in Komponenten schreibt man

$$(r_O - r_M)_1 = \left(1 + \bar{u}'; \bar{v}'; \frac{y}{a} + \bar{w}'\right) dx. \quad (70)$$

Dann ist der Betrag des Vektors

$$|r_O - r_M|_1 = \sqrt{(r_O - r_M)_1^2} = dx \sqrt{1 + 2\bar{u}' + \bar{u}'^2 + \bar{v}'^2 + \frac{y^2}{a^2} + 2\frac{y}{a}\bar{w}' + \bar{w}'^2}$$

oder nach Vernachlässigung aller Glieder zweiter Ordnung

$$|r_O - r_M|_1 = dx \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + 2\bar{u}' + 2\frac{y}{a}\bar{w}'} = dx \sqrt{\frac{a^2 + y^2}{a^2}} \sqrt{1 + \frac{2a^2}{a^2 + y^2}\bar{u}' + \frac{2ay}{a^2 + y^2}\bar{w}'}$$

Mit (68) vereinfacht man zu

$$|r_O - r_M|_1 = \sqrt{\frac{a^2 + y^2}{a^2}} \left(1 + \frac{a^2}{a^2 + y^2}\bar{u}' + \frac{ay}{a^2 + y^2}\bar{w}'\right) dx. \quad (71)$$

Die Dehnung ϵ_x ist definiert durch den Quotienten

$$\epsilon_x = \frac{\text{neue Länge} - \text{alte Länge}}{\text{alte Länge}} = \frac{\sqrt{\frac{a^2 + y^2}{a^2}} \left(1 + \frac{a^2}{a^2 + y^2}\bar{u}' + \frac{ay}{a^2 + y^2}\bar{w}'\right) dx - \alpha \cdot dx}{\alpha \cdot dx};$$

führt man wieder die Abkürzung $\alpha = \frac{a^2 + y^2}{a} = \frac{T}{a}$ ein, dann wird

$$\epsilon_x = \frac{a^2}{T^2} \left(\bar{u}' + \frac{y}{a}\bar{w}'\right). \quad (72a)$$

Entsprechend gelangt man zu der Beziehung für ϵ_y , wenn man (19c) beachtet:

$$\epsilon_y = \frac{a^2}{S^2} \left(\bar{v}' + \frac{x}{a}\bar{w}'\right). \quad (72b)$$

Der Koordinatenwinkel δ erfährt während der Verformung des Elementes den Zuwachs γ_{xy} . Aus $\gamma_{xy} = (\delta + \gamma_{xy}) - \delta$ leitet man ab:

$$\sin \gamma_{xy} = \gamma_{xy} = \sin(\delta + \gamma_{xy}) \cdot \cos \delta - \cos(\delta + \gamma_{xy}) \cdot \sin \delta. \quad (73)$$

Neben (23a, b) benötigt man

$$\sin(\delta + \gamma_{xy}) = \frac{|(\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M)_1 \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M)_1|}{|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M|_1 \cdot |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M|_1} \quad (74a)$$

sowie

$$\cos(\delta + \gamma_{xy}) = \frac{(\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M)_1 \cdot (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M)_1}{|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M|_1 \cdot |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M|_1}. \quad (74b)$$

Der gemeinsame Nenner beider Beziehungen ergibt sich mit (71) und entsprechender Vertauschung von x und y , bzw. von u und v , zu

$$\frac{1}{|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M|_1 \cdot |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M|_1} = \frac{1}{dx \cdot \frac{T}{a} \sqrt{1 + \frac{2a^2}{T^2} \bar{u}' + \frac{2ay}{T^2} \bar{w}' \cdot dy \cdot \frac{S}{a} \sqrt{1 + \frac{2a^2}{S^2} \bar{v}' + \frac{2ax}{S^2} \bar{w}'}}$$

oder gemäß (68) vereinfacht:

$$\mathbf{r}_O = \frac{1}{|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M|_1 \cdot |\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M|_1} = \frac{a^2}{dx \cdot dy \cdot ST} \left[1 - \frac{a}{S^2} (a\bar{v}' + x\bar{w}') - \frac{a}{T^2} (a\bar{u}' + y\bar{w}') \right]. \quad (75)$$

Weiter entwickelt man mit (70) in Determinantenform das Vektorprodukt

$$(\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M)_1 \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M)_1 = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 + \bar{u}' & \bar{v}' & y/a + \bar{w}' \\ \bar{u}' & 1 + \bar{v}' & x/a + \bar{w}' \end{vmatrix} \cdot dx \cdot dy$$

$$= \left[\left(-\frac{y}{a} + \frac{x}{a} \bar{v}' - \frac{y}{a} \bar{v}' - \bar{w}' \right); \left(-\frac{x}{a} + \frac{y}{a} \bar{u}' - \frac{x}{a} \bar{u}' - \bar{w}' \right); (1 + \bar{u}' + \bar{v}') \right] \cdot dx \cdot dy. \quad (76a)$$

Der Betrag dieses Vektors ist

$$|\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M|_1 \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M)_1 = \sqrt{\left(\frac{y}{a}\right)^2 - 2 \frac{xy}{a^2} \bar{v}' + 2 \frac{y}{a} \bar{w}' + \frac{2y^2}{a^2} \bar{v}' + \left(\frac{x}{a}\right)^2 - 2 \frac{xy}{a^2} \bar{u}' + \frac{2x^2}{a^2} \bar{u}' + \frac{2x}{a} \bar{w}' + 1 + 2\bar{u}' + 2\bar{v}' \cdot dx \cdot dy}.$$

Setzt man gemäß (20) $R = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2}$ ein und wendet (68) an, dann gelangt man zu

$$|(\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M)_1 \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M)_1| = \frac{dx \cdot dy}{aR} [R^2 + S^2 \bar{u}' + T^2 \bar{v}' - xy(\bar{v}' + \bar{u}') + a(y\bar{w}' + x\bar{w}')]. \quad (76b)$$

Aus (74a), (75) und (76b) ergibt sich

$$\sin(\delta + \gamma_{xy}) = \frac{a}{ST R} \left[R^2 + S^2 \bar{u}' + T^2 \bar{v}' - xy(\bar{v}' + \bar{u}') + a(y\bar{w}' + x\bar{w}') - \frac{aR^2}{S^2} (a\bar{v}' + x\bar{w}') - \frac{aR^2}{T^2} (a\bar{u}' + y\bar{w}') \right] \quad (77)$$

und mit $\cos \delta = \frac{xy}{ST}$ folgt schließlich

$$\sin(\delta + \gamma_{xy}) \cdot \cos \delta =$$

$$\frac{axy}{S^2 T^2 R} \left[R^2 + \frac{x^2 y^2}{T^2} \bar{u}' + \frac{x^2 y^2}{S^2} \bar{v}' - xy(\bar{u}' + \bar{v}') - \frac{ax^2 y}{T^2} \bar{w}' - \frac{axy^2}{S^2} \bar{w}' \right]. \quad (78)$$

Da

$$(r_O - r_M)_1 \cdot (r_P - r_M)_1 = \left(\frac{xy}{a^2} + \bar{u}' + \bar{v}' + \frac{x}{a} \bar{w}' + \frac{y}{a} \bar{w}' \right) dx dy, \quad (79)$$

wird gemäß (74b), (75) und (79)

$$\cos(\delta + \gamma_{xy}) = \frac{a^2}{ST} \left[\frac{xy}{a^2} + \bar{u}' + \bar{v}' + \frac{y}{a} \bar{w}' + \frac{x}{a} \bar{w}' - \frac{xy}{aS^2} (a\bar{v}' + x\bar{w}') - \frac{xy}{aT^2} (a\bar{u}' + y\bar{w}') \right]. \quad (80)$$

Mit $\sin \delta = \frac{aR}{ST}$ folgt das Produkt

$$-\cos(\delta + \gamma_{xy}) \cdot \sin \delta = \frac{a^3 R}{S^2 T^2} \left[-\frac{xy}{a^2} + \frac{xy}{T^2} \bar{u}' + \frac{xy}{S^2} \bar{v}' - (\bar{u}' + \bar{v}') - \frac{ax}{T^2} \bar{w}' - \frac{ay}{S^2} \bar{w}' \right]. \quad (81)$$

(78) und (81) werden gemäß (73) zusammengefaßt und ergeben die dritte der Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen

$$\gamma_{xy} = \frac{a}{R} \left[\frac{xy}{T^2} \bar{u}' + \frac{xy}{S^2} \bar{v}' - (\bar{u}' + \bar{v}') - \frac{ax}{T^2} \bar{w}' - \frac{ay}{S^2} \bar{w}' \right]. \quad (82)$$

5.3 Die Verschiebungen werden in Richtung der Tangenten und der Normale gemessen

Entgegen dem Abschnitt 5.2 sei der Verschiebungsvektor $\mathbf{v}$ nun durch seine Komponenten u, v, w in Richtung $\mathbf{t}_x, \mathbf{t}_y$ und $\mathbf{N}$ definiert, Bild 16.

Es ist möglich, den geometrischen Zusammenhang zwischen $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ und u, v, w in bekannter Weise unmittelbar herzuleiten. Man gelangt jedoch schneller zum Ziel, wenn man in den Beziehungen (72a), (72b) und (82) die Verschiebungsgrößen $\bar{u}, \bar{v}$ und $\bar{w}$ durch die entsprechenden Ausdrücke in u, v, w ersetzt. — Nach Bild 16 schreibt man

$$\mathbf{v} = u \cdot \mathbf{t}_x + v \cdot \mathbf{t}_y + w \cdot \mathbf{N}.$$

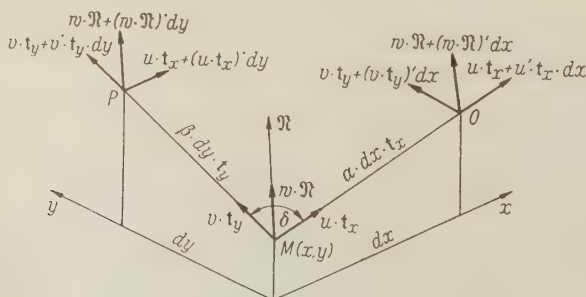


Bild 16

Zerlegt man in Richtung der Koordinatenachsen, dann erhält man mit (21) und (22)

$$\mathbf{v} = \left[\left(\frac{a}{T} u - \frac{y}{R} w \right); \left(\frac{a}{S} v - \frac{x}{R} w \right); \left(\frac{y}{T} u + \frac{x}{S} v + \frac{a}{R} w \right) \right],$$

$$\begin{cases} \bar{u} = \frac{a}{T} u - \frac{y}{R} w, \\ \bar{v} = \frac{a}{S} v - \frac{x}{R} w, \\ \bar{w} = \frac{y}{T} u + \frac{x}{S} v + \frac{a}{R} w. \end{cases} \quad (83 \text{ a-c})$$

Die Auflösung nach u, v, w ergibt gleichzeitig

$$\begin{cases} u = \frac{T}{a R^2} (S^2 \bar{u} - x y \bar{v} + a y \bar{w}), \\ v = \frac{S}{a R^2} (-x y \bar{u} + T^2 \bar{v} + a x \bar{w}), \\ w = \frac{1}{R} (-y \bar{u} - x \bar{v} + a \bar{w}). \end{cases} \quad (84 \text{ a-c})$$

Zur Durchführung der erforderlich werdenden Differentiationen seien einige Fälle angegeben. Um Ableitungen nach y zu erhalten, vertauscht man x, u und S mit y, v und T .

$$\begin{cases} S' = (\sqrt{a^2 - x^2})' = \frac{x}{S}, & R' = (\sqrt{a^2 + x^2 + y^2})' = \frac{x}{R}, \\ (S^n)' = n \cdot x \cdot S^{n-2}, & (R^n)' = n \cdot x \cdot R^{n-2}, \\ \left(\frac{1}{S^n} \right)' = -\frac{n \cdot x}{S^{n+2}}, & \left(\frac{1}{R^n} \right)' = -\frac{n \cdot x}{R^{n+2}}, \\ \left(\frac{x^m}{S^n} \right)' = \frac{x^{m-1} (m \cdot S^2 - n \cdot x^2)}{S^{n+2}}, & \left(\frac{x^m}{R^n} \right)' = \frac{x^{m-1} (m \cdot R^2 - n \cdot x^2)}{R^{n+2}}, \\ \left(\frac{S^p}{R^n} \right)' = \frac{x \cdot S^{p-2}}{R^{n+2}} (p \cdot R^2 - n \cdot S^2), & \\ \left(\frac{x^m}{S^p \cdot R^n} \right)' = \frac{x^{m-1}}{S^{p+2} \cdot R^{n+2}} (m \cdot S^2 \cdot R^2 - n \cdot x^2 \cdot S^2 - p \cdot x^2 \cdot R^2). \end{cases} \quad (85)$$

Schreibt man mit (85) die Ableitungen

$$\begin{aligned} u' &= \frac{a}{T} u' - \frac{y}{R} w' + \frac{x y}{R^3} w, \\ \bar{w}' &= \frac{y}{T} u' + \frac{x}{S} v' + \frac{S^2 - x^2}{S^3} v + \frac{a}{R} w' - \frac{a x}{R^3} w \end{aligned}$$

und setzt in (72 a) ein, dann erhält man die Dehnung

$$\epsilon_x = \frac{a^3 y}{S^3 T^2} v' + \frac{a}{T} u' + \frac{a x y}{S T^2} v'. \quad (86 \text{ a})$$

Durch Vertauschung bildet man

$$\varepsilon_{yy} = \frac{a^3 x}{S^2 T^3} u + \frac{a}{S} v + \frac{a x y}{S^2 T} u'. \quad (86 \text{ b})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{a^2 x^2 y}{S^2 T^3 R} u + \frac{a^2 x y^2}{S^3 T^2 R} v + \frac{2 a}{R^2} w - \frac{a^2 R}{S^2 T} u' - \frac{a^2 R}{S T^2} v'. \quad (87)$$

entsteht endlich aus (82). Während in den Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen des Abschnittes 5.2 die Verschiebungen nur in ihren Ableitungen erschienen, treten in den nun erhaltenen Relationen auch die Größen u, v, w selbst auf.

6. Die Erweiterung der Elastizitätsgesetze und der geometrischen Beziehungen für die biegesteife hyperbolische Paraboloidschale

6.1 Grundlagen

Stoffgesetze und geometrische Verknüpfungen wurden bislang nur für die Schalenmittelfläche hergeleitet. Bei der Aufstellung der Biegetheorie müssen jedoch auch Spannungen, Verzerrungen und Verschiebungen im Abstand s von der Mittelfläche miteinander in Beziehung gebracht werden. Es ist zu klären, in welcher Form die bisher gefundenen Gesetze hier noch Gültigkeit haben. — Bild 17 zeigt im Vergleich zu Bild 15 den Übergang zu der Tangentialebene im Abstand s von der Mittelfläche. Die Verschiebung v_s des Punktes M_s wird wie die Mittelflächenverschiebung v zerlegt; $\bar{u}_s, \bar{v}_s, \bar{w}_s$ sind die Komponenten in Richtung der Koordinatenachsen.

6.2 Die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen

Zur Herleitung der Spannungs-Verzerrungsbeziehungen führt man zweckmäßig die Spannungsgrößen σ_x, σ_y und τ_{xy} in Richtung der Seiten $M_s O_s$ bzw. $M_s P_s$ ein, Bild 18. Später sind diese Spannungen zum Zwecke der Schnittgrößenbestimmung gemäß Bild 6 umzurechnen.

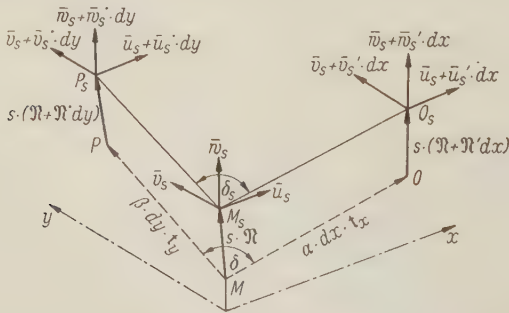


Bild 17

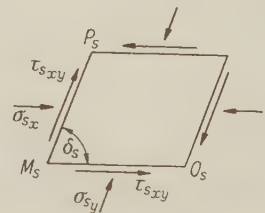


Bild 18

Unter Vernachlässigung höherer Glieder von s (die Schalendicke wird als klein gegen die übrigen Schalenabmessungen angesehen) ergeben sich die Seitenlängen wie folgt:

$$\begin{aligned}
(r_{O_s} - r_{M_s}) &= \alpha \cdot dx \cdot t_x + s \cdot \mathcal{N}' \cdot dx \\
&= \left[\left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3} \right); -s \cdot \frac{T^2}{R^3}; \left(\frac{y}{a} - s \cdot \frac{ax}{R^3} \right) \right] dx, \\
(r_{O_s} - r_{M_s})^2 &= \frac{dx^2}{R^6} \left[R^6 + 2sxyR^3 + \frac{y^2}{a^2}R^6 - 2sxyR^3 \right] = dx^2 \left(1 + \frac{y^2}{a^2} \right), \\
|r_{O_s} - r_{M_s}| &= \alpha \cdot dx;
\end{aligned}$$

ebenso

$$\begin{aligned}
(r_{P_s} - r_{M_s}) &= \beta \cdot dy \cdot t_y + s \cdot \mathcal{N}' \cdot dy, \\
|r_{P_s} - r_{M_s}| &= \beta \cdot dy.
\end{aligned}$$

Die Änderung der Seitenlängen ist demnach von höherer als der ersten Ordnung klein und wird nicht berücksichtigt.

Der eingeschlossene Winkel δ_s wird bestimmt durch

$$\cos \delta_s = \frac{(r_{O_s} - r_{M_s}) \cdot (r_{P_s} - r_{M_s})}{|r_{O_s} - r_{M_s}| \cdot |r_{P_s} - r_{M_s}|}.$$

Es läßt sich leicht zeigen, daß

$$(r_{O_s} - r_{M_s}) \cdot (r_{P_s} - r_{M_s}) = dx \cdot dy \left(\frac{xy}{a^2} - 2s \cdot \frac{1}{R} \right) \text{ ist.}$$

Nach Division durch $\alpha \cdot \beta \cdot dx \cdot dy$ gelangt man zu

$$\left| \cos \delta_s = \frac{xy}{ST} - 2s \cdot \frac{a^2}{STR}, \right| \quad (88a)$$

woraus sich errechnet

$$\sin \delta_s = \frac{aR}{ST} + 2s \cdot \frac{axy}{STR^2}. \quad (88b)$$

Setzt man die nun eingeführten Spannungen sowie (88a, b) in (67a, b, c) ein, dann schreibt man die Elastizitätsgesetze

$$\begin{aligned}
\sigma_{sx} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{ST}{aR} \left(1 - \frac{2xy}{R^3}s \right) (\epsilon_{sx} + \nu \cdot \epsilon_{sy}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{xyST}{a^2R^2} \left(1 - \frac{4x^2y^2 + 2a^2R^2}{xyR^3}s \right) \cdot \gamma_{sxy} \right], \\
\sigma_{sy} &= -\frac{E}{1-\nu^2} \left[\frac{ST}{aR} \left(1 - \frac{2xy}{R^3}s \right) (\epsilon_{sy} + \nu \cdot \epsilon_{sx}) \right. \\
&\quad \left. + \frac{xyST}{a^2R^2} \left(1 - \frac{4x^2y^2 + 2a^2R^2}{xyR^3}s \right) \cdot \gamma_{sxy} \right], \\
\tau_{sxy} &= \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left\{ \left[\frac{2S^2T^2}{a^2R^2} \left(1 - \frac{4xy}{R^3}s \right) - (1+\nu) \right] \gamma_{sxy} \right. \\
&\quad \left. + (1+\nu) \frac{xy}{aR} \left(1 - \frac{2S^2T^2}{xyR^3}s \right) (\epsilon_{sx} + \epsilon_{sy}) \right\}.
\end{aligned} \quad (89a-c)$$

Die Verzerrungen ε_{sx} , ε_{sy} und γ_{sxy} beziehen sich ebenfalls auf das Element nach Bild 18. Bei der Herleitung von (89) wurden für die Glieder mit s die Näherungen (68) benutzt.

6.3 Die Verzerrungs-Verschiebungsbeziehungen

Es sollen die geometrischen Beziehungen zwischen den Verzerrungen ε_{sx} , ε_{sy} , γ_{sxy} und den Verschiebungen $\bar{u}_s$, $\bar{v}_s$, $\bar{w}_s$ abgeleitet werden. Dazu bildet man zunächst gemäß Bild 17 und Abschnitt 5.2, wenn man wieder die Punkte nach der Verschiebung mit dem Index „I“ benennt,

$$\begin{aligned} (r_{O_s} - r_{M_s})_I &= dx (\alpha \cdot \bar{t}_x + s \cdot \bar{\mathcal{R}}') + dx (\bar{u}_s' + \bar{v}_s' + \bar{w}_s'), \\ &= dx \left[\left(1 + \bar{u}_s' + s \cdot \frac{xy}{R^3} \right); \left(\bar{v}_s' - s \cdot \frac{T^2}{R^3} \right); \left(\frac{y}{a} + \bar{w}_s' - s \cdot \frac{ax}{R^3} \right) \right]. \end{aligned} \quad (90)$$

Bei den nun folgenden Entwicklungen werden die Verschiebungen wie üblich bis zur ersten Ordnung berücksichtigt; neu und für die gesuchten Beziehungen von Einfluß sind die Produkte aus s und den Verschiebungen. Die in s linearen Glieder fallen heraus:

$$\begin{aligned} r_{O_s} - r_{M_s} \Big|_I &= dx \sqrt{1 + \frac{y^2}{a^2} + 2 \bar{u}_s' + 2 \frac{y}{a} \bar{w}_s' + s (xy \bar{u}_s' - T^2 \bar{v}_s' - ax \bar{w}_s')} \frac{2}{R^3} \\ &= dx \left[\frac{T}{a} + \frac{a}{T} \bar{u}_s' + \frac{y}{T} \bar{w}_s' + \frac{a}{T R^3} s (xy \bar{u}_s' - T^2 \bar{v}_s' - ax \bar{w}_s') \right]. \end{aligned} \quad (91)$$

Da die unverformte Länge nach 6.2 von s unabhängig ist, folgt

$$\varepsilon_{sx} = \frac{|r_{O_s} - r_{M_s}|_I - \frac{T}{a} dx}{\frac{T}{a} dx} = \frac{a^2}{T^2} \bar{u}_s' + \frac{ay}{T^2} \bar{w}_s' + \frac{a^2}{T^2 R^3} s (xy \bar{u}_s' - T^2 \bar{v}_s' - ax \bar{w}_s'). \quad (92)$$

Ebenso ermittelt man

$$\varepsilon_{sy} = \frac{a^2}{S^2} \bar{v}_s' + \frac{ax}{S^2} \bar{w}_s' + \frac{a^2}{S^2 R^3} s (xy \bar{v}_s' - S^2 \bar{u}_s' - ay \bar{w}_s'). \quad (93)$$

Analog Abschnitt 5.2 berechnet sich die Gleitung aus

$$\gamma_{sxy} = \sin(\bar{\delta}_s + \gamma_{sxy}) \cdot \cos \bar{\delta}_s - \cos(\bar{\delta}_s + \gamma_{sxy}) \cdot \sin \bar{\delta}_s, \quad (94)$$

wobei wieder die Winkelfunktionen von $(\bar{\delta}_s + \gamma_{sxy})$ über das vektorielle bzw. das skalare Produkt der beiden Seitenvektoren nach der Verformung gewonnen werden:

$$(r_{O_s} - r_{M_s})_I \times (r_{P_s} - r_{M_s})_I =$$

$$dx dy \begin{vmatrix} & x & y & z \\ 1 + \bar{u}_s' + s \frac{xy}{R^3} & \bar{v}_s' - s \frac{T^2}{R^3} & \frac{y}{a} + \bar{w}_s' - s \frac{ax}{R^3} \\ \bar{u}_s' - s \frac{S^2}{R^3} & 1 + \bar{v}_s' + s \frac{xy}{R^3} & \frac{x}{a} + \bar{w}_s' - s \frac{ay}{R^3} \end{vmatrix}$$

Nach einigen Rechengängen gelangt man zu dem gesuchten Betrag des Vektorproduktes

$$\begin{aligned}
 & |(\mathbf{r}_{O_s} - \mathbf{r}_{M_s})_1 \times (\mathbf{r}_{P_s} - \mathbf{r}_{M_s})_1| = \\
 & dx dy \cdot \frac{R}{a} \left\{ 1 + \frac{S^2}{R^2} \bar{u}_s' - \frac{xy}{R^2} (\bar{u}_s' + \bar{v}_s') + \frac{T^2}{R^2} \bar{v}_s' + \frac{a}{R^2} (y \bar{w}_s' + x \bar{w}_s') \right. \\
 & \quad + \frac{2xy}{R^3} s + s \frac{1}{R^5} [2xy (S^2 \bar{u}_s' + T^2 \bar{v}_s') + (a^2 R^2 - 2x^2 y^2) (\bar{u}_s' + \bar{v}_s') \\
 & \quad \left. + ax (S^2 + 3y^2) \bar{w}_s' + ay (T^2 + 3x^2) \bar{w}_s] \right\}, \quad (95)
 \end{aligned}$$

den man darauf mit (88a) multipliziert.

Das Skalarprodukt für die Cosinus-Funktion lautet mit (90) und Umstellung von x und y bzw. u und v

$$\begin{aligned}
 & (\mathbf{r}_{O_s} - \mathbf{r}_{M_s})_1 \cdot (\mathbf{r}_{P_s} - \mathbf{r}_{M_s})_1 = \\
 & dx dy \left[\left(1 + u_s' + s \frac{xy}{R^3} \right); \left(\bar{v}_s' - s \frac{T^2}{R^3} \right); \left(\frac{y}{a} + w_s' - s \frac{ax}{R^3} \right) \right] \cdot \\
 & \left[\left(\bar{u}_s' - s \frac{S^2}{R^3} \right); \left(1 + \bar{v}_s' + s \frac{xy}{R^3} \right); \left(\frac{x}{a} + \bar{w}_s' - s \frac{ay}{R^3} \right) \right] \\
 & = dx dy \left\{ \frac{xy}{a^2} + \bar{u}_s' + \bar{v}_s' + \frac{y}{a} \bar{w}_s' + \frac{x}{a} \bar{w}_s' - s \frac{2}{R} \right. \\
 & \quad \left. + s \frac{1}{R^3} [-S^2 \bar{u}_s' - T^2 \bar{v}_s' + xy (\bar{v}_s' + \bar{u}_s') - ay \bar{w}_s' - ax \bar{w}_s] \right\}.
 \end{aligned}$$

Multipliziert man hier entsprechend (94) mit (88b) und addiert dazu das Produkt aus (95) und (88a), so findet man

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{s,xy} \cdot |(\mathbf{r}_{O_s} - \mathbf{r}_{M_s})_1| \cdot |(\mathbf{r}_{P_s} - \mathbf{r}_{M_s})_1| = \\
 & dx dy \cdot \frac{xyR}{aST} \left\{ \frac{S^2}{R^2} \bar{u}_s' - \frac{S^2 T^2}{xy R^2} (\bar{u}_s' + \bar{v}_s') + \frac{T^2}{R^2} \bar{v}_s' - \frac{a}{R^2} \left(\frac{S^2}{y} \bar{w}_s' + \frac{T^2}{x} \bar{w}_s' \right) \right. \\
 & \quad \left. + s \frac{1}{R^5} \left[\frac{S^2}{xy} (2x^2 y^2 - a^2 R^2) \bar{u}_s' + \dots + \frac{a}{y} (2x^2 y^2 - T^2 R^2) \bar{w}_s' \right] \right\}.
 \end{aligned}$$

Das absolute und das in s lineare Glied sind weggefallen; bei der noch vorzunehmenden Division durch die Beträge gemäß (91) verdienen nur noch die absoluten Glieder im Nenner Beachtung, weil alle Beiträge höherer Ordnung ohnedies vernachlässigt würden.

Führt man die Division mit $dx \cdot dy \cdot \frac{ST}{a^2}$ durch, dann verbleibt für die Gleitung $\gamma_{s,xy}$

$$\begin{aligned}
 & \gamma_{s,xy} = \frac{a}{R} \left\{ \frac{xy}{T^2} \bar{u}_s' - (\bar{u}_s' + \bar{v}_s') + \frac{xy}{S^2} \bar{v}_s' - \frac{ax}{T^2} \bar{w}_s' - \frac{ay}{S^2} \bar{w}_s' \right. \\
 & \quad + s \frac{xy}{S^2 T^2 R^3} \left[\frac{S^2}{xy} (2x^2 y^2 - a^2 R^2) \bar{u}_s' + \frac{T^2}{xy} (2x^2 y^2 - a^2 R^2) \bar{v}_s' \right. \\
 & \quad \left. \left. - 2x^2 y^2 (\bar{u}_s' + \bar{v}_s') + \frac{a}{x} (2x^2 y^2 - S^2 R^2) \bar{w}_s' + \frac{a}{y} (2x^2 y^2 - T^2 R^2) \bar{w}_s' \right] \right\}. \quad (96)
 \end{aligned}$$

Bei $s = 0$ gehen die gefundenen Ausdrücke für die Verzerrungen in die Beziehungen (72a), (72b) und (82) des Abschnittes 5.2 über.

7. Die Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen der biegesteifen hyperbolischen Paraboloidschale

7.1 Grundlagen

Die Bestimmung der bei der Biegetheorie der Schalen auftretenden unbekannten Schnittgrößen und Verschiebungen erfordert neben den Gleichgewichtsbedingungen die Aufstellung von Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen, durch die das geometrisch-elastische Verhalten des Tragwerkes Berücksichtigung findet. Wie bereits mehrfach angedeutet, vollzieht sich die Verknüpfung der Schnittgrößen mit den Verschiebungen der Mittelfläche in mehreren Schritten. Schnittkräfte und Momente lassen sich nach Beispiel der Gleichungen (29) bis (31) durch die Spannungen im Abstand s von der Mittelfläche und diese wiederum durch die dort ausgelösten Verzerrungen ausdrücken. Im vorhergehenden Abschnitt wurde weiter die Abhängigkeit der Verzerrungen von den Verschiebungen eines Punktes M_s und seiner Nachbarpunkte aufgezeigt. Es bleibt nun noch die Aufgabe, nacheinander Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen für die Elemente außerhalb der Schalenmittelfläche zurückzuführen auf die Verschiebungen der Mittelfläche. Dann gelingt es, die Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen zu formulieren. War bisher — der üblichen Vereinfachung entsprechend — das Elastizitätsgesetz in seiner linearisierten Form, dem Hookeschen Gesetz, eingeführt und zudem die Schalendicke als klein gegenüber den übrigen Abmessungen der Schale vorausgesetzt worden, so wird nun die Bernoullische Hypothese vom Ebenbleiben der Querschnitte als neue vereinfachende Annahme zugrunde gelegt. Gleichzeitig werden die von den Querkraften herrührenden Verformungen vernachlässigt.

7.2 Die Zurückführung einiger Größen auf die Verschiebungen der Mittelfläche

7.21 Die Verschiebungen eines Schalenpunktes außerhalb der Mittelfläche

In Verbindung mit der Vernachlässigung der Querkraftverformungen besagt die Hypothese von Bernoulli, daß die Normalen zur Mittelfläche auch nach der Verformung zur neuen Mittelfläche normal sind, Bild 19.

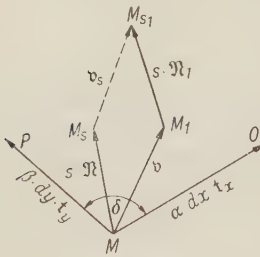


Bild 19

Der Punkt M_s liegt nach der Verformung als Punkt M_{s1} auf dem Stellsvektor $\mathfrak{N}_1$ der durch die Seitenvektoren bestimmten Tangentialebene an die verformte Schale. Sein Abstand vom Schalenpunkt M_1 bleibt mit s bestehen:

$$\mathbf{r}_{M_{s1}} = \mathbf{r}_M + \mathbf{v} + s \cdot \mathfrak{N}_1.$$

Die gesuchte Verschiebung $\mathbf{v}_s$ erhält man in Abhängigkeit von der Mittelflächenverschiebung $\mathbf{v}$ durch Subtraktion des Vektors $\mathbf{r}_{M_s}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s &= \mathbf{r}_{M_{s1}} - \mathbf{r}_{M_s} = \mathbf{r}_M + \mathbf{v} + s \cdot \mathfrak{N}_1 - (\mathbf{r}_M + s \cdot \mathfrak{N}), \\ \mathbf{v}_s &= \mathbf{v} + s (\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}). \end{aligned} \quad (97)$$

Hierin ist

$$\mathfrak{N}_1 = \frac{(\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M)_1 \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M)_1}{|(\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M)_1 \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M)_1|}. \quad (98)$$

Mit der Ableitung (76b) des Abschnittes 5.2 wird unter Beachtung von (68)

$$\begin{aligned} \frac{1}{(\mathbf{r}_O - \mathbf{r}_M)_1 \times (\mathbf{r}_P - \mathbf{r}_M)_1} &= \frac{1}{d x d y} \frac{a R}{R^2 + S^2 \bar{u}' + T^2 \bar{v}' - x y (\bar{v}' + \bar{u}') + a (y \bar{w}' + x \bar{w}')} \\ &= \frac{1}{d x d y} \frac{a}{R^3} [R^2 - S^2 \bar{u}' - T^2 \bar{v}' + x y (\bar{v}' + \bar{u}') - a (y \bar{w}' + x \bar{w}')] \end{aligned}$$

und nach Multiplikation mit dem Zähler (76a)

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_1 &= \frac{a}{R^3} \left\{ \left[R^2 \left(-\frac{y}{a} - w' - \frac{y}{a} \bar{v}' + \frac{x}{a} \bar{v}' \right) + y (y \bar{w}' + x \bar{w}') + \frac{y}{a} S^2 u' + \frac{y}{a} T^2 \bar{v}' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{x y^2}{a} (\bar{v}' + \bar{u}') \right]; \left[R^2 \left(-\frac{x}{a} - \bar{w}' - \frac{x}{a} \bar{u}' + \frac{y}{a} \bar{u}' \right) + x (x \bar{w}' + y w') + \frac{x}{a} S^2 u' \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x}{a} T^2 \bar{v}' - \frac{x^2 y}{a} (\bar{v}' + \bar{u}') \right]; \left[R^2 (1 + \bar{u}' + \bar{v}') - S^2 \bar{u}' - T^2 \bar{v}' + x y (\bar{v}' + \bar{u}') \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a (y \bar{w}' + x \bar{w}') \right] \right\}. \end{aligned}$$

Die verschiebungsfreien Glieder fallen bei der Bildung der Differenz ($\mathfrak{N}_1 - \mathfrak{N}$) weg, wenn man (22) berücksichtigt; zerlegt man weiter die Verschiebungen in Richtung der Koordinatenachsen, dann verbleibt

$$\begin{aligned} u_s &= \bar{u} + s \frac{a}{R^3} \left(\frac{x S^2}{a} \bar{v}' - \frac{x^2 y}{a} \bar{v}' + \frac{y S^2}{a} \bar{u}' - \frac{x y^2}{a} \bar{u}' - S^2 w' + x y \bar{w}' \right), \\ \bar{v}_s &= \bar{v} + s \frac{a}{R^3} \left(\frac{y T^2}{a} \bar{u}' - \frac{x y^2}{a} \bar{u}' + \frac{x T^2}{a} \bar{v}' - \frac{x^2 y}{a} \bar{v}' - T^2 \bar{w}' + x y \bar{w}' \right), \\ \bar{w}_s &= \bar{w} + s \frac{a}{R^3} [y^2 u' + x y (\bar{u}' + \bar{v}') + x^2 \bar{v}' - a (y \bar{w}' + x \bar{w}')]. \end{aligned} \quad (99 \text{ a-c})$$

Da die Endgleichungen die Mittelflächenverschiebungen u , v , w in Richtung der Tangenten und der Normale enthalten sollen, setzt man auf den rechten Seiten (83a-c) mit Ableitungen ein und faßt folgendermaßen zusammen:

$$\begin{aligned} \bar{u}_s &= \frac{a}{T} u - \frac{y}{R} w + s \frac{a}{R^3} \left(\frac{x y}{T} u - S v - \frac{S^2 R}{a} w' + \frac{x y R}{a} w' \right), \\ \bar{v}_s &= \frac{a}{S} v - \frac{x}{R} w + s \frac{a}{R^3} \left(-T u + \frac{x y}{S} v + \frac{x y R}{a} w' - \frac{T^2 R}{a} w' \right), \\ \bar{w}_s &= \frac{y}{T} u + \frac{x}{S} v + \frac{a}{R} w - s \frac{a}{R^3} \left(\frac{a x}{T} u + \frac{a y}{S} v + y R w' + x R w' \right). \end{aligned} \quad (100 \text{ a-c})$$

7.22 Die Verzerrungen außerhalb der Mittelfläche

Die in Abschnitt 6.3 abgeleiteten Verzerrungen ε_{sx} , ε_{sy} und $\gamma_{s,xy}$ werden nun als Funktion der Mittelflächenverschiebungen u , v , w dargestellt. Dazu setzt man in (92), (93) und (96) die Verschiebungsgrößen (100a-c) mit ihren Ableitungen ein und ordnet. Für die Dehnungen findet man

$$\begin{aligned} \varepsilon_{sx} &= \frac{a^3 y}{S^3 T^2} v' + \frac{a}{T} u' + \frac{a x y}{S T^2} v' \\ &\quad + s \left\{ \frac{2 a^3 x}{S^3 T^2 R} v' + \frac{a^2}{R^4} w' + \frac{2 a^3}{S T^2 R} v'' - \frac{a^2}{T^2} w'' \right\}, \end{aligned} \quad (101 \text{ a})$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{a^3 x}{S^2 T^3} u + \frac{a}{S} v + \frac{a x y}{S^2 T} u' + \left\{ \frac{2 a^3 y}{S^2 T^3 R} u + \frac{a^2}{R^4} w + \frac{2 a^3}{S^2 T R} u' - \frac{a^2}{S^2} w'' \right\}. \quad (101 \text{ b})$$

In gleicher Weise bildet man

$$\begin{aligned} \gamma_{sxy} = & \frac{a^2 x^2 y}{S^2 T^3 R} u + \frac{a^2 x y^2}{S^3 T^2 R} v + \frac{2 a}{R^2} u' - \frac{a^2 R}{S^2 T} u' - \frac{a^2 R}{S T^2} v' \\ & + s \left[\frac{2 a^2 x}{S^2 T^3 R^4} (y^2 T^2 - 2 a^2 R^2) u + \frac{2 a^2 y}{S^3 T^2 R^4} (x^2 S^2 - 2 a^2 R^2) v + \frac{4 a x^3 y^3}{S^2 T^2 R^5} u' \right. \\ & + \frac{2 a^2 x^2 y^2}{S^2 T^3 R^2} u' - \frac{2 a^2 x y}{S^2 T R^2} u' - \frac{2 a^2 x y}{S T^2 R^2} v' + \frac{2 a^2 x^2 y^2}{S^3 T^2 R^2} v' - \frac{2 a y}{R^3} w' \\ & \left. - \frac{2 a x}{R^3} w' - \frac{a x y}{T^2 R} w'' + \frac{2 a}{R} w' - \frac{a x y}{S^2 R} w'' \right]. \end{aligned} \quad (102)$$

7.23 Die Spannungen außerhalb der Mittelfläche

Im nächsten Schritt wird es unternommen, die Spannungen σ_{sx} , σ_{sy} und τ_{sxy} nach Bild 18 auf die Mittelflächenverschiebungen u , v , w und ihre Ableitungen zu beziehen. Setzt man (101a, b) und (102) in (89a—c) ein, so erhält man nacheinander

$$\begin{aligned} \sigma_{sx} = & -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{x^3 y^2}{S T^2 R^3} u + \frac{y T}{R^3} v + \frac{2 x y S T}{a R^4} w + \frac{S}{R} u' - \frac{x y}{S R} u' \right. \\ & + v \left(\frac{a^2 x}{S T^2 R} u + \frac{x y}{S R} u' + \frac{T}{R} v' \right) \\ & + s \left[\frac{2 x^2 y}{S T^2 R^6} (y^2 R^2 - 3 S^2 T^2) u + \frac{2 x}{S^2 T R^6} (a^2 S^2 R^2 + x^2 y^2 R^2 - 3 y^2 S^2 T^2) v \right. \\ & + \frac{1}{a S T R^7} (a^2 S^2 T^2 R^2 - 4 S^4 T^4 - 4 a^2 x^2 y^2 R^2) w - \frac{2 a^2 x y}{S T^2 R^2} u' + \frac{2 S T^2}{R^4} u' \\ & + \frac{4 a^2}{T R^2} v' + \frac{2 x^3 y^3}{S^2 T R^4} v' - \frac{2 x y S T}{a R^3} (y w' + x w') \\ & \left. - \frac{S^3 T}{a R^3} w'' + \frac{2 x y S T}{a R^3} w' - \frac{x^2 y^2 T}{a S R^3} w'' \right] \\ & + v \cdot s \left[\frac{2 a^2 y}{S R^4} u + \frac{a S T}{R^5} w + \frac{2}{S R^4} (a^2 R^2 - x^2 y^2) u' - \frac{2 x y T}{R^4} v' + \frac{a T}{S R} w'' \right] \Big\}, \end{aligned} \quad (103)$$

$$\begin{aligned}
\tau_{sxy} = & \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{2x^2y}{TR^3} u + \frac{2xy^2}{SR^3} v + \frac{2}{aR^4} (S^2T^2 + x^2y^2) w + \frac{xyu'}{TR} - \frac{Tu}{R} - \frac{S}{R} v' \right. \\
& + \frac{xy}{SR} v' + v \left[-\frac{2a}{R^2} w + \frac{xy}{TR} u' + \frac{T}{R} u + \frac{S}{R} v' + \frac{xy}{SR} v' \right] \\
& + s \left[\frac{2x}{S^2T^3R^5} (a^4R^4 + 2S^2T^4y^2 - 4S^4T^4) u + \frac{2y}{S^3T^2R^6} \cdot \right. \\
& (a^4R^4 + 2S^4T^2x^2 - 4S^4T^4) v - \frac{2xy}{aS^2T^2R^7} (2a^2x^2y^2R^2 + 3a^2S^2T^2R^2 + 4S^4T^4) w \\
& + \frac{2}{S^2T^2R^4} (x^4y^4 - a^2S^2T^2R^2) \left(\frac{u'}{T} + \frac{v'}{S} \right) \\
& + \frac{2xy}{ST R^4} (2a^2R^2 + S^2T^2) \left(\frac{u'}{S} + \frac{v'}{T} \right) - \frac{2}{aR^5} (S^2T^2 + x^2y^2) (yw' + xw') \\
& - \frac{2xy}{aR^3} (S^2w'' + T^2w'') + \frac{2}{aR^3} (S^2T^2 + x^2y^2) w' \left. \right] \\
& + v \cdot s \left[\frac{2a^4}{S^2T^2R^2} \left(\frac{x}{T} u + \frac{y}{S} v \right) + \frac{2axy}{S^2T^2R^5} (a^2R^2 - x^2y^2) w \right. \\
& - \frac{2}{S^2T^2R^4} (a^2x^2y^2R^2 + S^4T^4) \left(\frac{u'}{T} + \frac{v'}{S} \right) \\
& + \frac{2xy}{ST R^4} (a^2R^2 - x^2y^2) \left(\frac{u'}{S} + \frac{v'}{T} \right) + \frac{2a}{R^3} (yw' + xw') - \frac{2a}{R} w' \left. \right\}.
\end{aligned} \tag{104}$$

7.3 Die Schnittgrößen als Funktion der Mittelflächenverschiebungen

7.31 Zur Definition der Schnittgrößen

In Abschnitt 3.1 wurde bereits die Definition der Schnittgrößen allgemein angegeben. Gemäß Bild 5 und 6 hat man die Spannungserresultierenden im untersuchten Schnitt in Richtung der Koordinatenlinien zu zerlegen. Die Komponenten seien entsprechend der auf die Asymptoten bezogenen Schalendarstellung mit σ_x , σ_y , τ_{xy} und τ_{yx} bezeichnet; sie werden nun aus den im Abschnitt 7.23 berechneten Spannungen σ_{sx} , σ_{sy} und $\tau_{sxy} = \tau_{syx}$ abgeleitet. Diese letzteren Größen weisen definitionsgemäß in Richtung der Linienelemente im Abstand s von der Schalenmittelfläche, wie es die Bilder 17 und 18 zeigen. Für die Spannung σ_{sx} z. B. ergibt die Zerlegung in Richtung t_x und t_y

$$\sigma_{sx} \cdot \frac{r_{Os} - r_{Ms}}{|r_{Os} - r_{Ms}|} = \sigma_{sx} \cdot \frac{\alpha \cdot t_x + s \cdot \mathfrak{N}'}{\alpha} = \sigma_{sx} \left(1 + s \frac{xy}{R^3} \right) \cdot t_x - \sigma_{sx} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3} t_y,$$

wenn man die Entwicklungen auf Seite 25 sowie (39a) berücksichtigt. Die im gleichen Schnitt wirkende Schubspannung τ_{sxy} hat die folgenden Komponenten:

$$\tau_{sxy} \cdot \frac{r_{Ps} - r_{Ms}}{|r_{Ps} - r_{Ms}|} = -\tau_{sxy} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3} t_x + \tau_{sxy} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3} \right) t_y.$$

Entsprechend erhält man für den anderen Schnitt die Zerlegungen

$$\sigma_{sy} \cdot \frac{r_{Ps} - r_{Ms}}{|r_{Ps} - r_{Ms}|} = -\sigma_{sy} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3} t_x + \sigma_{sy} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3}\right) \cdot t_y,$$

$$\tau_{sxy} \cdot \frac{r_{Os} - r_{Ms}}{|r_{Os} - r_{Ms}|} = \tau_{sxy} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3}\right) t_x - \tau_{sxy} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3} t_y.$$

Die Zusammenfassung zugeordneter Komponenten führt zu den Spannungen in Richtung t_x und t_y

$$\sigma_x = \sigma_{sx} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3}\right) - \tau_{sxy} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3}, \quad (105a)$$

$$\tau_{xy} = -\sigma_{sx} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3} + \tau_{sxy} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3}\right), \quad (105b)$$

$$\sigma_y = \sigma_{sy} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3}\right) - \tau_{sxy} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3}, \quad (106a)$$

$$\tau_{yx} = -\sigma_{sy} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3} + \tau_{sxy} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3}\right). \quad (106b)$$

Aus (105a) folgt gemäß (29) für die Längskraft

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_x ds = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{sx} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3}\right) ds - \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{sxy} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3} ds.$$

Vernachlässigt man wieder in (105a) alle in s quadratischen Glieder und berücksichtigt

$$\int_{-h/2}^{+h/2} s ds = 0,$$

dann verbleibt einfach

$$N_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{sx} ds.$$

Schreibt man abkürzend für (103)

$$\sigma_{sx} = [\sigma_{sx}^{(1)} + \nu \cdot \sigma_{sx}^{(2)}] + s [\sigma_{sx}^{(3)} + \nu \cdot \sigma_{sx}^{(4)}], \quad (107)$$

so wird

$$N_x = h [\sigma_{sx}^{(1)} + \nu \cdot \sigma_{sx}^{(2)}]. \quad (108)$$

Ebenso folgert man

$$N_y = h [\sigma_{sy}^{(1)} + \nu \cdot \sigma_{sy}^{(2)}]. \quad (109)$$

Mit (31a) und (105b) ist die Schubkraft N_{xy} definiert:

$$N_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{xy} ds = \int_{-h/2}^{+h/2} \tau_{sxy} \left(1 + s \cdot \frac{xy}{R^3}\right) ds - \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_{sx} \cdot s \cdot \frac{ST}{R^3} ds.$$

Unter Beachtung der Vereinfachungen und nach Einführung der Abkürzung für (104)

$$\tau_{sxy} = [\tau_{sxy}^{(1)} + \nu \cdot \tau_{sxy}^{(2)}] + s [\tau_{sxy}^{(3)} + \nu \cdot \tau_{sxy}^{(4)}] \quad (110)$$

gelangt man zu

$$N_{xy} = h [\tau_{sxy}^{(1)} + v \cdot \tau_{sxy}^{(2)}] . \quad (111)$$

Wegen der Gleichheit von τ_{sxy} und τ_{syx} führt die Ableitung für N_{yx} zu demselben Ergebnis,

$$N_{xy} = N_{yx} . \quad (112)$$

Das Zustandekommen von (112) trotz Verschiedenheit von τ_{xy} und τ_{yx} ist der Beschränkung auf Glieder erster Ordnung in s zuzuschreiben, wie bereits in Abschnitt 3.1 erläutert wurde.

Man erkennt aus Bild 9 leicht, daß die Spannungen (105) und (106) nicht unmittelbar zur Definition der Momente benutzt werden können. Für den Schnitt $x = \text{const}$ z. B. benötigt man die auf den Koordinatenlinien senkrecht stehenden Spannungskomponenten σ_1 und σ_2 nach Bild 20:

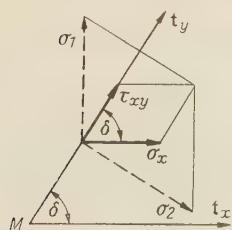


Bild 20

$$\sigma_1 = \frac{\tau_{xy} + \sigma_x \cdot \cos \delta}{\sin \delta} ,$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x + \tau_{xy} \cdot \cos \delta}{\sin \delta} .$$

Mit (23) sowie den Beziehungen (105) ergibt sich

$$\sigma_1 = \frac{ST}{aR} \cdot \tau_{sxy} + \left(\frac{xy}{aR} - \frac{a}{R^2} \cdot s \right) \cdot \sigma_{sx} , \quad (113a)$$

$$\sigma_2 = \frac{ST}{aR} \cdot \sigma_{sx} + \left(\frac{xy}{aR} - \frac{a}{R^2} \cdot s \right) \cdot \tau_{sxy} . \quad (113b)$$

Damit gilt

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_2 \cdot s \cdot ds , \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 \cdot s \cdot ds .$$

Führt man wieder die Abkürzungen (107) und (110) ein und berücksichtigt weiter

$$\int_{-h/2}^{+h/2} s \, ds = 0 , \quad \int_{-h/2}^{+h/2} s^2 \, ds = \frac{h^3}{12} = I ,$$

so ist

$$M_x = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_2 \cdot s \cdot ds = \frac{ST}{aR} [\sigma_{sx}^{(3)} + v \cdot \sigma_{sx}^{(4)}] \cdot I + \frac{xy}{aR} [\tau_{sxy}^{(3)} + v \cdot \tau_{sxy}^{(4)}] \cdot I - \frac{a}{R^2} [\tau_{sxy}^{(1)} + v \cdot \tau_{sxy}^{(2)}] \cdot I , \quad (114)$$

$$M_{xy} = \int_{-h/2}^{+h/2} \sigma_1 \cdot s \cdot ds = \frac{xy}{aR} [\sigma_{sx}^{(3)} + v \cdot \sigma_{sx}^{(4)}] \cdot I - \frac{a}{R^2} [\sigma_{sx}^{(1)} + v \cdot \sigma_{sx}^{(2)}] \cdot I + \frac{ST}{aR} [\tau_{sxy}^{(3)} + v \cdot \tau_{sxy}^{(4)}] \cdot I . \quad (115)$$

Die Momente M_y und M_{yx} erhält man durch entsprechendes Vertauschen.

7.32 Die Verschiebungsgleichungen für N_x , N_y und N_{xy}

Durch Einsetzen von (103) und (104) in (108), (109) und (111) gelangt man zu den Verschiebungsgleichungen für die Kräfte:

$$N_x = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{x^3 y^2}{S T^2 R^3} u + \frac{y T}{R^3} v + \frac{2xyST}{a R^4} w + \frac{S}{R} u' - \frac{xy}{S R} u' \right. \\ \left. + v \left[\frac{a^2 x}{S T^2 R} u + \frac{xy}{S R} u' + \frac{T}{R} v' \right] \right\}, \quad (116)$$

$$N_y = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{xS}{R^3} u + \frac{x^2 y^3}{S^2 T R^3} v + \frac{2xyST}{a R^4} w - \frac{xy}{T R} v' + \frac{T}{R} v' \right. \\ \left. + v \left[\frac{a^2 y}{S^2 T R} v + \frac{S}{R} u' + \frac{xy}{T R} v' \right] \right\}, \quad (117)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{2x^2 y}{T R^3} u + \frac{2xy^2}{S R^3} v + \frac{2a^2 R^2 + 4x^2 y^2}{a R^4} w + \frac{xy}{T R} u' - \frac{T}{R} u' \right. \\ \left. - \frac{S}{R} v' + \frac{xy}{S R} v' + v \left[-\frac{2a}{R^2} w + \frac{xy}{T R} u' + \frac{T}{R} u' + \frac{S}{R} v' + \frac{xy}{S R} v' \right] \right\}. \quad (118)$$

7.33 Die Verschiebungsgleichungen für M_x , M_y , M_{xy} und M_{yx}

Nach Auswerten von (114) und (115) findet man die Verschiebungsgleichungen für die Momente:

$$M_x = \frac{EI}{1-\nu^2} \left\{ \frac{ay}{S^2 T^3 R^5} [(1+\nu) a^2 x^2 R^2 + x^2 S^2 T^2 - 2\nu \cdot S^2 T^4] u \right. \\ + \frac{ax}{S^3 T^2 R^5} [x^2 y^4 - 2S^4 T^2 + (2+\nu) a^2 y^2 R^2] v \\ + \frac{2}{S^2 T^2 R^5} [S^4 T^4 - (1+\nu) x^4 y^4] w + \frac{xy}{2a S^2 T^3 R^5} [(1-3\nu) a^2 S^2 T^2 R^2 \\ + 2(1-\nu) x^4 y^4 - 4\nu a^2 x^2 y^2 R^2] u' \\ - \frac{1}{2a S^2 T R^5} [(3+5\nu) a^4 R^4 + (1-\nu) (a^2 x^2 y^2 R^2 + 2x^4 y^4)] u' \\ - \frac{1}{2a S T^2 R^5} [(7+\nu) a^4 R^4 + (1-\nu) (a^2 x^2 y^2 R^2 - 2x^4 y^4)] v' \\ - \frac{xy}{2a S^3 T^2 R^5} [2(1-\nu) x^4 y^4 + (3-\nu) a^2 S^2 T^2 R^2 + 4a^2 x^2 y^2 R^2] v' \\ \left. + (1+\nu) \left[\frac{x y^2}{R^4} w' + \frac{x^2 y}{R^4} w' - \frac{xy}{R^2} w'' \right] + \frac{S^2}{R^2} w'' + \nu \frac{T^2}{R^2} w'' \right\}, \quad (119)$$

$$\begin{aligned}
M_{xy} = & \frac{EI}{1-\nu^2} \left\{ \frac{ax}{S T^2 R^5} [2(1-\nu)y^2 R^2 - (3-2\nu)S^2 T^2] u \right. \\
& - \frac{ay}{S^2 T R^5} [(1-\nu)a^2 R^2 + S^2 T^2] v - \frac{2xy}{S T R^5} (a^2 R^2 + \nu \cdot x^2 y^2) w \\
& + \frac{1}{aS T^2 R^5} [(1-\nu)a^2 x^2 y^2 R^2 + x^2 y^2 S^2 T^2 - \nu \cdot S^4 T^4] u' \\
& - (1-\nu) \left[\frac{x^3 y^3}{aS R^5} u' - \frac{xy}{a T R^5} (x^2 y^2 - a^2 R^2) v' \right] - \frac{1}{aS^2 T R^5} [(1-\nu)x^4 y^4 \\
& + a^2 S^2 T^2 R^2] v' - (1-\nu) \left[\frac{y S T}{R^1} w' + \frac{x S T}{R^1} w' - \frac{S T}{R^2} w'' + \frac{x y T}{S R^2} w'' \right] \left. \right\}. \quad (120)
\end{aligned}$$

Vertauscht man x und y sowie u und v , so gelangt man zu den Ausdrücken für M_y bzw. M_{yx} .

8. Eine angenäherte Biegetheorie der hyperbolischen Paraboloidschale

8.1 Begründung der Näherungen

Die Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen sind in der Form des Abschnittes 7.3 für die praktische Rechnung unbrauchbar. Es liegt deshalb nahe, nach einer Näherung zu suchen, die noch über die bisher eingeführten Vereinfachungen hinausgeht. — Die Koeffizienten der Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen sind Funktionen der beiden unabhängigen Veränderlichen x und y sowie des konstanten Schalenparameters a . Geometrisch legt die Größe a bekanntlich das Krümmungsmaß der Schale fest. Die vorliegende Arbeit geht nun von der Erkenntnis aus, daß die praktisch vorkommenden hyperbolischen Paraboloidschalen relativ flach sind; d. h., daß a stets größer ist als die Grundrißkoordinaten x_1 und y_1 :

$$\begin{aligned}
a > |x_1| \quad \text{oder} \quad \left| \frac{x_1}{a} \right| < 1, \\
a > |y_1| \quad \text{oder} \quad \left| \frac{y_1}{a} \right| < 1.
\end{aligned} \quad (121)$$

Die Anschauung erhärtet diese Annahme; denn die Quotienten x/a und y/a geben die Steigung der Asymptoten an, die sicher auch am Rande noch flacher als unter einem Winkel von 45° gegen die Horizontale geneigt sind, Bild 3. Studien über technisch und ästhetisch befriedigende Dachformen führten zu einer optimalen Randbalkensteigung von rd. $1/5$.

Danach ist es berechtigt, die Ausdrücke für die Schnittgrößen und ebenso die Gleichgewichtsbedingungen nach Potenzen von

$$\frac{x}{a} = p \quad \text{und} \quad \frac{y}{a} = q \quad (122)$$

zu entwickeln und dadurch zu vereinfachen, daß man die Entwicklung je nach Schalenform und gewünschter Genauigkeit abbricht.

Als Beispiel möge das Glied mit w'' in (119) herausgegriffen werden. Man bildet mit (122)

$$\begin{aligned}
-(1+\nu) \frac{xy}{R^2} w'' &= -(1+\nu) \frac{xy}{a^2 [1 + (x/a)^2 + (y/a)^2]} w'' \\
&= -(1+\nu) \frac{xy}{a^2} (1 - p^2 - q^2 + p^4 + q^4 + \dots) w''.
\end{aligned}$$

Der Ausdruck ist mindestens von zweiter Ordnung klein gegen die zweite Ableitung w'' . Es steht frei, nach der zweiten Ordnung abzubrechen oder beispielsweise die Glieder vierter Ordnung noch mitzunehmen:

$$= -(1 + \nu) \frac{xy}{a^2} \left[1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 - \left(\frac{y}{a} \right)^2 \right] w'.$$

Beim Übergang zur ebenen Platte fällt mit $a \rightarrow \infty$ der Term weg. Anders ist es mit dem folgenden Ausdruck in (119):

$$\begin{aligned} \frac{S^2}{R^2} w'' &= \frac{a^2 [1 + (x/a)^2]}{a^2 [1 + (x/a)^2 + (y/a)^2]} w'' = (1 + p^2) [1 - p^2 - q^2 + p^4 + q^4 + \dots] w'' \\ &= [1 - q^2 - p^2 q^2 + q^4 + \dots] w''. \end{aligned}$$

Er bleibt mit seinem ersten Klammerglied auch beim Übergang zur Platte erhalten und ist damit im Sinne der hier durchzuführenden Näherung von M_x ein Maßstab für die Abschätzung der übrigen Gleichungsbestandteile.

Hinsichtlich der Größenordnung wurde bereits vorausgesetzt, daß alle Verschiebungen klein sind gegen die Schalenabmessungen und die ersten Ableitungen der Verschiebungen gegen „1“ klein sind. Führt man die von Null verschiedene, sonst beliebige Schalenkoordinate x_1 ein, so gilt z. B.

$$|w| < |x_1|, \quad \left| \frac{w}{x_1} \right| < 1 \quad \text{entspr.} \quad \left| \frac{dw}{dx} \right| = |w'| < 1.$$

Analog folgert man

$$\boxed{|x_1 w''| < 1.}$$

Die Bezugsgröße w'' ist — wie alle hier vorkommenden zweiten Ableitungen — selbst von zweiter Ordnung klein gegen „1“. Beim Größenvergleich werden nun die Summanden so erweitert, daß stets ein Produkt zweiter Ordnung gemäß dem w'' abgespalten wird:

$$\begin{aligned} w &= x_1^2 \cdot \left(\frac{1}{x_1} \right) \cdot \left(\frac{w}{x_1} \right), \\ w' &= x_1 \cdot \left(\frac{1}{x_1} \right) \cdot w'. \end{aligned}$$

So entwickelt man in (119)

$$\begin{aligned} &\frac{2}{S^2 T^2 R^6} [S^4 T^4 - (1 + \nu) x^4 y^4] w = \\ &\left[\frac{2 x_1^2}{a^2} (1 + \dots) - 2 (1 + \nu) \frac{x_1^2 \cdot x^4 \cdot y^4}{a^{10}} (1 + \dots) \right] \left(\frac{1}{x_1} \right) \cdot \left(\frac{w}{x_1} \right) \end{aligned}$$

und erkennt, daß das erste Glied mindestens von zweiter, das nächste sogar von zehnter Ordnung klein ist gegen $\left(\frac{1}{x_1} \right) \cdot \left(\frac{w}{x_1} \right)$ oder w'' . Es sei schließlich noch ein Ausdruck mit w' herausgegriffen:

$$(1 + \nu) \frac{xy^2}{R^4} w' = (1 + \nu) \frac{x_1 \cdot x y^2}{a^4} (1 + \dots) \left(\frac{1}{x_1} \right) \cdot w'.$$

Hier liegt ein Term vor, der von vierter Ordnung klein ist gegen w'' .

Aus den bisher gebrachten Beispielen läßt sich eine einfache Abschätzungsregel ableiten: Der Exponent von a gibt die Größenordnung der Koeffizienten an.

In den Schnittkraft-Verschiebungsgleichungen (116) bis (118) wird der Größenordnungsvergleich analog auf die von a unabhängigen Glieder bezogen.

8.2 Die Näherungen für die Schnittgrößen-Verschiebungsgleichungen

Bei den Näherungen dieses und der folgenden Abschnitte soll so verfahren werden, daß Glieder in u und v einschließlich deren Ableitungen bis zur zweiten Ordnung Berücksichtigung finden. Da in den meisten praktischen Fällen die Normalverschiebungen w zahlenmäßig größer sind als u und v , erscheint es dagegen zweckmäßig, alle Einflüsse in w zunächst bis zur dritten Ordnung mitzunehmen.

Aus (116) bis (118) folgt mit den Regeln des Abschnittes 8.1 sowie unter Beachtung von (68)

$$N_x = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{y}{a^2} v + \frac{2xy}{a^3} w + \frac{\sqrt{1+p^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} u' - \frac{xy}{a^2} u' \right. \\ \left. + v \left[\frac{x}{a^2} u + \frac{xy}{a^2} u' + \frac{\sqrt{1+q^2}}{\sqrt{1+p^2+q^2}} v' \right] \right\},$$

$$N_x = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{2}{a^2} v + \frac{3}{a^3} xy w + \left(1 - \frac{y^2}{2a^2} \right) u' - \left(1 - \nu \right) \frac{xy}{a^2} u' \right. \\ \left. + v \left[\frac{x}{a^2} u + \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} \right) v' \right] \right\}, \quad (123)$$

$$N_y = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ \frac{x}{a^2} u + \frac{2xy}{a^3} w + \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} \right) v' - \left(1 - \nu \right) \frac{xy}{a^2} v' \right. \\ \left. + v \left[\frac{y}{a^2} v + \left(1 - \frac{y^2}{2a^2} \right) u' \right] \right\}, \quad (124)$$

$$N_{xy} = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ (1-\nu) \left[\frac{2}{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} \right) w - \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} \right) u' - \left(1 - \frac{y^2}{2a^2} \right) v' \right] \right. \\ \left. + (1+\nu) \frac{xy}{a^2} (u' + v') \right\}. \quad (125)$$

In (123) sind noch einmal die Größenordnungen der Einzelglieder angeschrieben. Die Momente M_x und M_{xy} lassen sich gegenüber (119) und (120) in derselben Weise vereinfachen:

$$M_x = \frac{EI}{1-\nu^2} \left\{ \frac{2}{a^2} w - \frac{3+5\nu}{2a} u' - \frac{7+\nu}{2a} v' - (1+\nu) \frac{xy}{a^2} w'' + \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) w'' \right. \\ \left. + v \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) w'' \right\}, \quad (126)$$

$$M_{xy} = \frac{EI}{1-\nu^2} \left\{ -\nu \cdot \frac{1}{a} u' - \frac{1}{a} v' \right. \\ \left. - (1-\nu) \left[\frac{y}{a^2} w' + \frac{x}{a^2} w' - \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} \right) w'' + \frac{xy}{a^2} w'' \right] \right\}. \quad (127)$$

Durch Vertauschen finden sich aus (126) und (127) die sechste und siebente Verschiebungsgleichung

$$M_y = \frac{EI}{1-\nu^2} \left\{ \frac{2}{a^2} w - \frac{3+5\nu}{2a} v' - \frac{7+\nu}{2a} u' - (1+\nu) \frac{xy}{a^2} w'' + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) w'' \right. \\ \left. + \nu \left(1 - \frac{y^2}{a^2} \right) w'' \right\}, \quad (128)$$

$$M_{yx} = \frac{EI}{1-\nu^2} \left\{ -\nu \cdot \frac{1}{a} v' - \frac{1}{a} u' \right. \\ \left. - (1-\nu) \left[\frac{x}{a^2} w' + \frac{y}{a^2} w' - \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} \right) w'' + \frac{xy}{a^2} w'' \right] \right\}. \quad (129)$$

Glieder dritter Ordnung in w treten nicht auf. Man überzeugt sich leicht, daß nach einem Grenzübergang $a \rightarrow \infty$ (123) bis (125) in die Verschiebungsgleichungen der Scheibe und entsprechend (126) bis (129) in die bekannten Beziehungen für die Platte übergehen.

8.3 Die angenäherten Gleichgewichtsbedingungen

Die durchweg von x und y abhängigen Koeffizienten der Schnittgrößen in den im Abschnitt 3 aufgestellten Gleichgewichtsbedingungen (41), (42), (43) sowie (54) und (55) müssen ebenso entwickelt werden wie die Schnittgrößen selbst. So ist z. B. in (41) der Koeffizient von N_x' von maximal nullter Ordnung:

$$N_x' \cdot \frac{S}{a} = N_x' \cdot \sqrt{1+p^2} = N_x' \cdot \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} + \dots \right),$$

während

$$N_y \cdot \frac{xy^2}{aST} = N_y \cdot \frac{xy^2}{a^3} (1 + \dots)$$

mindestens von dritter Ordnung ist. Bedenkt man, daß z. B. N_x' und $\frac{N_x}{x_1}$ von der gleichen Größenordnung sind, so können alle Ableitungsglieder einwandfrei abgeschätzt werden. Mit den Ausdrücken für die Querkräfte und deren Ableitungen kommen allerdings zu den Membrangliedern anders geartete Biegeglieder in die Gleichungen (41) bis (43). Die Querkräfte werden aus (54) und (55) als Funktion der Momente und deren ersten Ableitungen gebildet. Das größte Glied in $Q_y \cdot \frac{1}{R}$ aus (41) kann wie folgt abgeschätzt werden, wenn man noch die Schalenbiegesteifigkeit in die Betrachtung einbezieht:

$$\frac{1}{a} \cdot \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} w''' \quad \text{entspr.} \quad \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{h^3}{12a} \cdot \frac{w''}{x_1}, \quad \text{bzw.} \\ \frac{E}{1-\nu^2} \cdot \frac{h}{12} \cdot \frac{h^2}{x_1^2} \cdot \frac{x_1}{a} w''.$$

Demgegenüber steht das größte der Membranglieder aus N_x' mit

$$\frac{Eh}{1-\nu^2} u''.$$

Wird durch $\frac{Eh}{1-\nu^2}$ dividiert, dann vergleicht man u'' mit $\frac{1}{12} \cdot \frac{h^2}{x_1^2} \cdot \frac{x_1}{a} w''$ und erkennt, daß der letzte Ausdruck mindestens von 3. Ordnung klein ist gegen den ersten. Dasselbe läßt sich von $Q_x \cdot \frac{1}{R}$ in (42) sagen. Es ist damit gerechtfertigt, den Einfluß der Querkkräfte und damit aller Biegeglieder in den beiden Gleichgewichtsbedingungen gegen Verschieben in Richtung der Asymptoten zu vernachlässigen. Man entwickelt (41) bis zur dritten Ordnung und erhält:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a^2} N_x + \left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) N_x' + \frac{xy}{a^2} N_y + \frac{2y}{a^2} N_{xy} + \frac{xy}{a^2} N_{xy}' \\ + \left(1 + \frac{y^2}{2a^2}\right) N_{xy}' = \left(1 - \frac{y^2}{2a^2}\right) \bar{X} + \frac{y}{a} \bar{Z}. \end{aligned} \quad (130)$$

Ebenso ergibt sich die angenäherte zweite Gleichgewichtsbedingung

$$\begin{aligned} \frac{y}{a^2} N_y + \left(1 + \frac{y^2}{2a^2}\right) N_y' + \frac{xy}{a^2} N_x' + \frac{2x}{a^2} N_{xy} + \frac{xy}{a^2} N_{xy}' \\ + \left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) N_{xy}' = \left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right) \bar{Y} + \frac{x}{a} \bar{Z}. \end{aligned} \quad (131)$$

Die Belastungen haben dieselbe Größenordnung wie die Schnittkraftableitungen. Die vierte und fünfte Gleichgewichtsbedingung (54) und (55) liefern

$$Q_x = \frac{y}{a^2} M_{yx} + \left(1 - \frac{y^2}{2a^2}\right) M_x' - \frac{xy}{a^2} M_y' - \frac{xy}{a^2} M_{xy}' + \left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right) M_{yx}', \quad (132)$$

$$Q_y = \frac{x}{a^2} M_{xy} + \left(1 - \frac{x^2}{2a^2}\right) M_y' - \frac{xy}{a^2} M_x' - \frac{xy}{a^2} M_{yx}' + \left(1 - \frac{y^2}{2a^2}\right) M_{xy}'. \quad (133)$$

Bei der dritten Gleichgewichtsbedingung (43), der Normalengleichung, taucht wieder die Frage nach dem Größenverhältnis von Membran- und Biegegliedern auf. Da dem Belastungsanteil in Richtung der Normalen sowohl allein durch den Membrananteil $\frac{2}{R} N_{xy}$ als auch allein durch die Biegeglieder (Platte!) das Gleichgewicht gehalten werden kann, sind beide Anteile als größenordnungsmäßig gleichwertig anzusehen. Demnach erscheint im Nenner der Membranglieder a in einer um eins höheren Potenz als in den Biegegliedern.

$$\begin{aligned} \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2}\right) N_{xy} + \frac{x}{a^2} Q_x + \left(1 + \frac{x^2}{2a^2}\right) Q_x' + \frac{y}{a^2} Q_y + \left(1 + \frac{y^2}{2a^2}\right) Q_y' \\ = -\frac{y}{a} \bar{X} - \frac{x}{a} \bar{Y} + \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2}\right) \bar{Z}. \end{aligned} \quad (134)$$

8.4 Die Aufstellung des Differentialgleichungssystems

Mit den bekannten angenäherten Gleichgewichtsbedingungen und Schnittgrößen-Verchiebungsgleichungen kann es nun gemäß Abschnitt 3.4 unternommen werden, die drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen des Problems aufzustellen¹⁾. — Für die erste Gleichgewichtsbedingung (130) bildet man die Ableitungen aus (123) und (125)

$$N_x' = -\frac{Eh}{1-\nu^2} \left\{ -(1-\nu) \left(\frac{y}{a^2} u' + \frac{xy}{a^2} u'' \right) + \left(1 - \frac{y^2}{2a^2} \right) u'' + \frac{y}{a^2} v' + \frac{2y}{a^3} w + \frac{2xy}{a^3} w' \right. \\ \left. + \nu \left[\frac{1}{a^2} u + \frac{x}{a^2} u' - \frac{x}{a^2} v + \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} \right) v' \right] \right\}, \\ N_{xy}' = \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ (1+\nu) \left(\frac{x}{a^2} u' + \frac{xy}{a^2} u'' + \frac{x}{a^2} v + \frac{xy}{a^2} v' \right) \right. \\ \left. + (1-\nu) \left[-\left(1 - \frac{x^2}{2a^2} \right) u'' + \frac{y}{a^2} v' - \left(1 - \frac{y^2}{2a^2} \right) v'' - \frac{4y}{a^3} w + \frac{2}{a} \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} \right) w' \right] \right\}.$$

N_y' und N_{xy}' entstehen durch entsprechendes Vertauschen. Setzt man unter Beachtung des eingangs zugrunde gelegten Näherungsgrades in (130) ein, dann erhält man die erste Differentialgleichung

$$\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ -\nu \cdot \frac{2}{a^2} u - \frac{4y}{a^3} w + (1+\nu) \left(-\frac{x}{a^2} u' + \frac{x}{a^2} v - \frac{2xy}{a^3} w' - v'' \right) \right. \\ \left. - (3-\nu) \frac{y}{a^2} v' - \left(2 + \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} \right) u'' + (1-\nu) \left[\left(\frac{2}{a} - \frac{2x^2}{a^3} - \frac{y^2}{a^3} \right) w' \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2xy}{a^2} u'' - \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2a^2} \right) u'' - \frac{xy}{a^2} v'' - \frac{xy}{a^2} v' \right] \right\} = \left(1 - \frac{y^2}{2a^2} \right) \bar{X} + \frac{y}{a} \bar{Z}. \quad (135)$$

Entsprechend bildet man die zweite Differentialgleichung

$$\frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \left\{ -\nu \cdot \frac{2}{a^2} v - \frac{4x}{a^3} w + (1+\nu) \left(\frac{y}{a^2} u' - \frac{y}{a^2} v' - \frac{2xy}{a^3} u'' - u'' \right) \right. \\ \left. - (3-\nu) \frac{x}{a^2} u' - \left(2 - \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} \right) v'' + (1-\nu) \left[\left(\frac{2}{a} - \frac{x^2}{a^3} - \frac{2y^2}{a^3} \right) w' \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{xy}{a^2} u'' - \frac{xy}{a^2} u' - \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} \right) v'' + \frac{2xy}{a^2} v' \right] \right\} = \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} \right) \bar{Y} + \frac{x}{a} \bar{Z}. \quad (136)$$

Zwecks Aufstellung der dritten Differentialgleichung müssen zuvor die Querkräfte abgeleitet werden. Setzt man die Beziehungen für die Momente und ihre Ableitungen in (132) ein, so erhält man die Querkraft

$$Q_x = \frac{EI}{1-\nu^2} \left\{ (1+\nu) \left(-\frac{5}{2a} u' + \frac{1}{a^2} w' - \frac{x}{a^2} w'' \right) - \frac{7+\nu}{2a} v'' - \nu \cdot \frac{1}{a} v' \right. \\ \left. - \frac{2y}{a^2} w'' - (1-\nu) \frac{x}{a^2} w'' + \left(1 - \frac{3y^2}{2a^2} \right) w''' - \frac{3xy}{a^2} w'' - \frac{xy}{a^2} w' \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} \right) w'' \right\}. \quad (137)$$

Q_y ergibt sich durch übliches Vertauschen.

¹⁾ Dabei ist die Schalendicke h als konstant vorausgesetzt.

Nach Bildung der Ableitungen schreibt man gemäß (134) die dritte Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
 & \frac{E h}{a(1-\nu^2)} \left\{ (1-\nu) \left[\left(\frac{2}{a} - \frac{3x^2}{a^3} - \frac{3y^2}{a^3} \right) w - \left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{2a^2} \right) u \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. - \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{a^2} \right) v' \right] + (1+\nu) \left(\frac{xy}{a^2} u' + \frac{xy}{a^2} v' \right) \right\} \\
 & + \frac{EI}{1-\nu^2} \left\{ -\frac{1}{2a} (5+7\nu) (u'' + v'') - \frac{7+\nu}{2a} (u''' + v''') - \frac{1-\nu}{a^2} (w'' + w'') \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1-\nu}{a^2} (xw''' + yw''') - \frac{7+\nu}{a^2} (yw''' + xw''') - \frac{4xy}{a^2} (w'''' + w''') \right. \\
 & \quad \left. + \left(1 + \frac{x^2}{2a^2} - \frac{3y^2}{2a^2} \right) w^{iv} + \left(2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} \right) w'''' + \left(1 - \frac{3x^2}{2a^2} + \frac{y^2}{2a^2} \right) w'' \right\} \\
 & = -\frac{y}{a} \bar{X} - \frac{x}{a} \bar{Y} + \left(1 - \frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{2a^2} \right) \bar{Z}.
 \end{aligned} \tag{138}$$

Die Gleichung enthält einen Membran- und einen Biegeanteil. Beim Grenzübergang zur ebenen Platte gelangt man zu der bekannten Plattengleichung.

8.5 Zur praktischen Lösung des Gleichungssystems

Die Lösung des im Abschnitt 8.4 gewonnenen Systems von drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen ist mit Hilfe der Differenzenmethode möglich. Das Verfahren stellt eine Näherung dar; je kleiner die Maschenweite des achsenparallelen Gitters gewählt wird, desto genauer werden die Ergebnisse, desto größer wird natürlich auch die Zahl der linearen Gleichungen, die aufzulösen sind. Für jeden Punkt sind die drei unbekannten Verschiebungswerte u , v und w zu bestimmen. Dementsprechend fallen für jeden Gitterpunkt auch drei lineare Gleichungen an. Die Randbedingungen können in jeder gewünschten Form Berücksichtigung finden, wobei besonders zu erwähnen ist, daß man zur Erfüllung der Randbedingungen nicht mit den Gitterpunkten den Rand zu überschreiten braucht. Es empfiehlt sich, die durch Symmetrie und Antimetrie von Tragwerk und Belastung sich anbietenden Vereinfachungen zu nutzen.

Eine analytische Lösung mittels Fourier-Entwicklung ist ebenfalls möglich. Nur ist das Produktbilden von Fourierreihen wegen der quadratischen Glieder und der Glieder höherer Ordnung rechnerisch kompliziert. Läßt man die genannten Glieder höherer Ordnung außer acht, so erhält man als 1. Approximation ein System mit konstanten Koeffizienten:

$$\begin{aligned}
 & \frac{E h}{2a(1-\nu^2)} \left\{ -(1+\nu) a v'' - 2a u'' + (1-\nu) (2w' - a u'') \right\} = \bar{X} + \frac{y}{a} \bar{Z}, \\
 & \frac{E h}{2a(1-\nu^2)} \left\{ -(1+\nu) a u'' - 2a v'' + (1-\nu) (2v' - a v'') \right\} = \bar{Y} + \frac{x}{a} \bar{Z}, \\
 & \frac{E h}{a^2(1-\nu^2)} \left\{ (1-\nu) (2w - a u' - a v') \right\} \\
 & + \frac{EI}{2a(1-\nu^2)} \left\{ -(5+7\nu) (u'' + v'') - (7+\nu) (u''' + v''') \right. \\
 & \quad \left. + 2a (w^{iv} + 2w'''' + w'') \right\} = -\frac{y}{a} \bar{X} - \frac{x}{a} \bar{Y} + \bar{Z}.
 \end{aligned} \tag{139 a-c}$$

Die einfache Form (139) eignet sich natürlich gleichzeitig zur numerischen Auflösung mittels der Differenzenmethode, wenn die Schale nicht zu stark gekrümmt ist. Mit der Kenntnis des Verschiebungszustandes ist das gestellte Problem grundsätzlich gelöst. Es können nun mit Hilfe der vorhandenen Gleichungen alle Schnittgrößen und Spannungen numerisch angegeben werden. Die Spannungen nach Bild 18 errechnet man zweckmäßig unmittelbar aus den Formeln (103) und (104) des Abschnittes 7.23, die hier bis zu Größen erster Ordnung entwickelt werden sollen:

$$\sigma_{s_x} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ u' + \nu \cdot v' + s \left(\frac{2}{a} u' + \frac{4}{a} v' - w'' \right) + \nu \cdot s \left(\frac{2}{a} u' - w'' \right) \right\}, \quad (140 a)$$

$$\sigma_{s_y} = -\frac{E}{1-\nu^2} \left\{ v' + \nu \cdot u' + s \left(\frac{2}{a} v' + \frac{4}{a} u' - w'' \right) + \nu \cdot s \left(\frac{2}{a} v' - w'' \right) \right\}, \quad (140 b)$$

$$\tau_{s_{xy}} = \frac{E}{2(1-\nu^2)} \left\{ \frac{2}{a} w - u' - v' + \nu \left(-\frac{2}{a} w + u' + v' \right) + s \left(-\frac{2}{a} u' - \frac{2}{a} v' + 2w'' \right) + \nu \cdot s \left(-\frac{2}{a} u' - \frac{2}{a} v' - 2w'' \right) \right\}. \quad (140 c)$$

Zum Zwecke der praktischen Spannungsermittlung darf der Winkel $\delta = \pi/2$ gesetzt werden.

9. Zusammenfassung

Zu Eingang wird eine knappe Darlegung der Differentialgeometrie krummer Flächen und insbesondere des gleichseitigen hyperbolischen Paraboloides unter Zuhilfenahme der Methoden der Vektoranalysis gebracht. Es wird gezeigt, daß sich die Fläche gut beschreiben läßt, wenn man sie auf das schiefwinklige Netz der geraden Asymptotenlinien bezieht. Nach einer grundlegenden Definition der Spannungen und Schnittgrößen am unverformten Schalelement erfolgt die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen. Die Vektorgleichungen gegen Verschieben und Verdrehen können durch Projektion auf beliebige Richtungen in je drei skalare Beziehungen umgewandelt werden. Eine der Gleichgewichtsbedingungen erweist sich als überzählig.

Im folgenden Abschnitt gelingt es, die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen am schiefwinkligen Flächenelement abzuleiten. Zur Beschreibung des Verschiebungszustandes müssen alsdann die Verzerrungen geometrisch mit den Verschiebungen und deren Ableitungen verknüpft werden. Dieser Schritt wird für zwei verschiedene Komponenten-darstellungen des Verschiebungsvektors durchgeführt. Stets bleiben die Entwicklungen auf den linearen Einfluß beschränkt. Die Abhandlung widmet sich nun ganz der Aufstellung der Biegetheorie. Wurden bisher Verzerrungen und Verschiebungen nur für Elemente der Schalenmittelfläche verfolgt, so wird nun der Übergang zur Tangentialebene im Abstand s von der Mittelfläche vollzogen. Infolge der Änderung des Koordinatenwinkels mit dem Abstand s erfahren zunächst die Spannungs-Verzerrungsbeziehungen eine Erweiterung. Daraufhin wird der Einfluß der Schalenkoordinate s auf den geometrischen Zusammenhang zwischen Verzerrungen und Verschiebungen untersucht. Die Schnittgrößen können nun über die Spannungen und Verzerrungen durch die Verschie-

bungen im Abstand s von der Mittelfläche ausgedrückt werden. Da die Grundgleichungen aber die Mittelflächenverschiebungen enthalten müssen, entsteht nun die Aufgabe, nacheinander Verschiebungen, Verzerrungen und Spannungen für die Elemente außerhalb der Schalenmittelfläche zurückzuführen auf die gesuchten Verschiebungen der Mittelfläche.

Die Schnittkräfte ergeben sich definitionsgemäß aus den Spannungen in Richtung der Koordinatenlinien durch Integration über die Schalendicke. Da in s linear gerechnet wird, sind die beiden zugeordneten Schubkräfte einander gleich. Der Ansatz der Verschiebungsgleichungen für die Momente erfordert eine Zerlegung der Spannungen senkrecht zu den Koordinatenlinien. Es läßt sich zeigen, daß die gefundenen Beziehungen beim Grenzübergang zum ebenen Tragwerk in die bekannten Relationen für Scheibe und Platte übergehen.

Die nun gefundenen weiteren Grundgleichungen des Problems sind in dieser allgemeinen Form für die numerische Auswertung nicht brauchbar. Es lag deshalb nahe, eine Näherung zu finden, die sich die geometrischen Eigenschaften der praktisch vorkommenden Paraboloidschalen zunutze macht. Die Grundgleichungen werden in Potenzreihen entwickelt. Man hat es nun in der Hand, je nach der gewünschten Genauigkeit abzurechnen. Eingehende Überlegungen werden angestellt, um die Größenordnung der einzelnen Glieder gegeneinander abzuschätzen. Aus den angenäherten Grundgleichungen werden die drei gekoppelten partiellen Differentialgleichungen des Problems aufgestellt.

Der letzte Abschnitt beschäftigt sich mit der praktischen Lösung des Systems. Eine analytische Lösung mittels Fourier-Entwicklung ist praktisch — beschränkt auf spezielle Randbedingungen — nur möglich, wenn man in den Gleichungen bereits hinter den linearen Gliedern abbricht. Für die vollständigeren Differentialgleichungen kommt dagegen das Differenzenverfahren als Lösungsweg in Betracht. Hierbei können die Randbedingungen in jeder gewünschten Form Berücksichtigung finden. Die Güte dieses Verfahrens hängt u. a. von der Dichte des gewählten Punktegitters ab. Da allerdings dem Ingenieur heute programmgesteuerte elektronische Rechenanlagen zur Verfügung stehen, wird man auch umfangreichere lineare Gleichungssysteme durchaus in Kauf nehmen können. — Mit der Kenntnis des Verschiebungszustandes ist das gestellte Problem grundsätzlich gelöst. Es können nun — u. U. ebenfalls unter Zuhilfenahme von finiten Ausdrücken — alle Schnittgrößen und Spannungen angegeben werden.

Damit ist es gelungen, eine auf die praktischen Bedürfnisse zugeschnittene Biegetheorie der gleichseitigen hyperbolischen Paraboloidschale aufzustellen. Schalendachbauten dieser heute architektonisch viel diskutierten Form, ob bogenartig begrenzt oder mit geraden Randbalken längs der Asymptoten versehen, können nun ingenieurmäßig erfaßt werden. Die aufgelöste Rippenschale, insbesondere das Stahllamellendach, in Form eines hyperbolischen Paraboloides erfordert eine entsprechende Abstimmung der hier entwickelten Theorie. Del Pozo [21] ging bereits für Kreiszylinderschalen einen ähnlichen Weg. — Bei sehr flachen Schalen mit einer geringen Biegesteifigkeit sind der Anwendung der Biegetheorie Grenzen gesetzt. Natürlich versagt unter diesen Verhältnissen erst recht die einfache Membrantheorie, die zu immer größeren Werten für die Schnittkräfte führt. In Wahrheit werden die Lasten durch endliche Verformungen der Haut aufgefangen. Man wird dem Verhalten von dünnen Schalen und Häuten unter beliebigen Lasten am besten nahekommen, wenn man eine Verformungstheorie für die Membrane entwickelt, die auch bedingt auf drei- oder mehrschichtige Seilnetze anwendbar ist [10]. Allerdings steht man dann der Schwierigkeit gegenüber, daß das Superpositions-gesetz nicht mehr gilt und man die Rechnung für verschiedene Randfunktionen wiederholen muß. Die Bedeutung einer solchen Arbeit liegt weniger in der Beurteilung der Tragfähigkeit der Haut als in der Abschätzung der Verformungen. Der weiteren Forschung steht noch ein reiches Feld offen.

Literatur

- [1] Ban, Shizuo: Formänderungen der hyperbolischen Paraboloidschale. Abh. Int. Ver. f. Brückenbau u. Hochbau. 1953, 13, 1.
- [2] Candela, F.: Structural Applications of Hyperbolic Paraboloidal Shells. Journ. Amer. Concrete Inst. 1955, Title Nr. 51—20, 26.
- [3] Fadle, J.: Eine einfache Ableitung der Gleichgewichtsbedingungen des Schalenproblems. Ing.-Arch. 1944, 14, 413.
- [4] Flügge, W.: Statik und Dynamik der Schalen. Berlin 1934, Springer.
- [5] Flügge, W.: Zur Membrantheorie der Drehschalen negativer Krümmung. Z. angew. Math. Mech. 1947, 25—27, 65.
- [6] Franz, G.: Grundsätzliches zum Vorspannen von Flächentragwerken. Beton- und Stahlbetonbau 1953, 48, 140.
- [7] Freyssinet, E.: Unvorhergesehene Zwischenfälle beim Bau des Funkhauses der Radio-Station Feldberg (Europa 1). Travaux 1956, 40, 49.
- [8] Fuchssteiner, W., u. Schader, A.: Allgemeine Schalengrundgleichungen. Beton- u. Stahlbetonbau 1956, 51, 145.
- [9] Girkmann, K.: Flächentragwerke. Wien 1956, Springer.
- [10] Hamel, G.: Aufbau einer Theorie der Häute und der dünnen Schalen nach der Methode von Lagrange. Abh. der Preuß. Akad. d. Wiss. 1943.
- [11] Hruban, K.: Trogshalen in Industriebauten. Bauplanung-Bautechn. 1954, 8, S. 50.
- [12] Layrangués, M.: Théorie de la statique des voiles minces par les méthodes de l'analyse vectorielle. Annales des Ponts et Chaussées 1953, 123.
- [13] Layrangués, M.: Théorie de la statique des voiles minces en coordonnées rectilignes. Annales des Ponts et Chaussées 1954, 124, 27.
- [14] Layrangués, M.: Etude générale de la déformation élastique des voiles minces. Annales des Ponts et Chaussées 1956, 126, 39.
- [15] Marguerre, K.: Neuere Festigkeitsprobleme des Ingenieurs; Kap. 3: Die Festigkeit von Schalen; bearb. von W. Flügge. Berlin 1950, Springer.
- [16] Neuber, H.: Allgemeine Schalentheorie. Z. angew. Math. Mech. 1949, 29, 98 u. 142.
- [17] Otto, Frei: Das hängende Dach, Gestalt und Struktur. Berlin 1954, Bauwelt Verlag.
- [18] Otto, Frei: Neue Hallenbauten mit hängendem Dach. Deutsche Bauzeitschrift 1954, S. 224.
- [19] Parkus, H.: Die Grundgleichungen der Schalentheorie in allgemeinen Koordinaten. Österr. Ing.-Arch. 1950, 4, 160.
- [20] Pflüger, A.: Elementare Schalenstatik. Berlin 1957, Springer.
- [21] Del Pozo, F.: Kreiszyklinderschalen mit metallischem Dreiecksgitter. Abh. Int. Ver. f. Brückenbau und Hochbau. 5. Kongreß Vorber. 1956.
- [22] Ralston, A.: On the Problem of Buckling of a Hyperbolic Paraboloidal Shell loaded by its own Weight. Journ. Math. Phys. 1956, 35, 53.
- [23] Rüdiger, D.: Spannungen und Verschiebungen der krummen Flächen mit schiefer Grundriß. Österr. Ing.-Arch. 1955, 9, 265.
- [24] Rühle, H.: Die Rationalisierung des Entwurfes und der Ausführung von Schalenbauten. Bauplanung-Bautechn. 1956, 10, 111.
- [25] Steinhardt, O.: Theorie und Berechnung von Stahlbrücken. Berlin 1958, Springer.
- [26] Tester, K. G.: Berechnung der hyperbolischen Paraboloidschale. Ing.-Arch. 1947, 16, 39.
- [27] Tetzlaff, W.: Tonnen- und trogartige Schalen. Berlin 1953, VEB Verlag Technik.
- [28] Tschech, E.: Bemerkung zur Theorie der Membranschalen. Österr. Ing.-Arch. 1955, 9, 224.
- [29] Zerna, W.: Beitrag zur allgemeinen Schalenbiegetheorie. Ing.-Arch. 1949, 17, 149.
- [30] Zerna, W.: Berechnung von Translationsschalen. Österr. Ing.-Arch. 1953, 7, 181.

BAUTECHNIK-ARCHIV

Zur Zeit sind lieferbar:

Heft 2

W. Paxmann: **Erfahrungen eines Wasserbauers.** Nach einem hinterlassenen Manuskript „Mein dienstlicher Lebenslauf“ von Dr.-Ing. E. h. Zander.

Prof. Dr.-Ing. E. Marquardt: **Die Abwasserreinigung und die sich dabei abspielenden stofflichen Vorgänge.**

Dr.-Ing. H. Press: **Über die Druckverteilung im Boden hinter Wänden verschiedener Art.** Gr.-8°. 54 S., 53 Abb. 1948
Geh. DM 6,40

Heft 3

J. Volk: **Geleitwort.** — Widmung zum 20jährigen Bestehen der Degebo.

Prof. Dr.-Ing. A. Agatz u. Dr.-Ing. E. Lackner: **Noch offenstehende Probleme auf dem Gebiet des Grundbaues.**

Dr.-Ing. H. Muhs: **Arbeiten der Degebo in den Jahren 1938 bis 1948.**

Prof. Dr.-Ing. H. Lorenz: **Anwendung des seismischen Bodenuntersuchungsverfahrens bei einem Talsperrenbau.**

Prof. Dr. E. Brennecke und Dipl.-Ing. K. Ansorge: **Meßtechnische Grundlagen bei Setzungsmessungen an großen Bauwerken.**

Dr. O. Förtisch und Dr.-Ing. H. Muhs: **Untersuchungen an einem fehlerhaften Kompressorfundament.**

Dr. A. Ramspeck und Dr. G. A. Schulze: **Schwingungsuntersuchungen an einfachen Mauerwerkskörpern und Gebäuden.**

Prof. Dr.-Ing. E. h. A. Hertweg: **Das technische Experiment in der Bodenmechanik.** Gr.-8°. 74 S., 76 Abb. 1948
Geh. DM 7,20

Heft 4

Prof. Dr.-Ing. H. Wittmann: **Tulla, Honsel, Rehbock. Lebensbilder dreier Wasserbauingenieure am Oberrhein.**

Dr.-Ing. R. Ohlig: **Berechnung und Bau von Plattenbrücken.** Gr.-8°. 73 S., 3 Abb. und 25 Textabb. 1949
Geh. DM 7,50

Heft 5

Bergass. a. D. H. Jähde: **Neue Erfahrungen auf dem Gebiete der Verfestigung und Abdichtung des Untergrundes.**

Prof. L. Rothmund: **Die Gleichungen der Stau- und Senkungsweiten für rechteckigen und parabolischen Gerinnequerschnitt und ihre praktische Anwendung.**

Prof. Dr.-Ing. G. Worch: **Über Zusammenhänge zwischen der technischen Balkenbiegungslehre und der Scheibentheorie.** Gr.-8°. 60 S., 41 Abb. 1949
Geh. DM 5,20

Heft 6

Dr.-Ing. K. A. Müller: **Der I-Träger unter Belastung durch Drehmomente.**

Dipl.-Ing. H. Walter: **Das Knickproblem bei Spitzenpfählen, deren Schaft ganz oder teilweise in nachgiebigem Boden steht.**

Prof. Dr.-Ing. G. Worch: **Die Berechnung kreisförmiger zentralsymmetrischer Fundamentplatten nach dem Differenzenverfahren.** Gr.-8°. 66 S., 57 Abb. 1951
Geh. DM 8,60

Heft 7

Dr.-Ing. J. J. Rieve: **Stabilität I-förmiger Querschnitte unter der örtlichen Lastenteilung.**

Obering. H. Sasse: **Die Typenwertmethode, ein neues Verfahren zur Berechnung von bewehrten und unbewehrten Baukörpern.**

Dr.-Ing. E. Gruber: **Gekrümmte Faltwerke.**

Gr.-8°. 102 S., 64 Abb. 1953

Geh. DM 9,60

Heft 8

Vorträge der Baugrundtagung vom 30. 1. bis 2. 2. 1952 in Essen.

H. Carp: **Deichbau im Emschergebiet.** — J. Schmidbauer: **Standsicherheit von Berghalden.** —

J. Ohde: **Berechnung der Standsicherheit von Böschungen und Staudämmen.** — R. Auberlen: **Verdichtung von Rohr- und Kabelgräben in Stadtstraßen.** — P. Siedek: **Messen des Porenwasserüberdrucks.** — G. P. Tschebotarioff: **Einfluß der „Gewölbebildung“ auf die Erddruckverteilung.** —

J. P. van Bruggen: **Holländische Anschauungen über die Tragfähigkeit gerammter Pfähle.** —

H. Kahl: **Untersuchung des Baugrundes mit einer Spitzendrucksonde.** — E. Knop: **Baustellenversuche mit seitlich beanspruchten Stahlpfählen und Vorspannung der Verankerung von Stützwänden.** — E. Lohmeyer: **Staudämme aus Steinschüttung mit Asphaltdichtung auf der Wasserseite.** — E. Schultze: **Bodenmechanische Probleme im Bergbau.** — H. Lorenz: **Tragfähigkeit starrer Spundwände und Mastgründungen.** — W. Bernatzik: **Justierung des Kraftwerkes Hessigheim am Neckar durch Heben mit Hilfe von Zementunterpressungen.** — R. L'Herminier: **Tragfähigkeit von Schlammböden.**

Gr.-8°. VIII, 97 S., 165 Abb. 1952

Geh. DM 12,—

Heft 9

Dr.-Ing. H. Muhs: **Erddruckversuche an einer durch Reibung verankerten Stützwand.**

Dr.-Ing. G. Brandes: **Über das Verhalten von Pfahlgründungen bei Schwingungserregung.**

Prof. Dr.-Ing. W. Sichert und Dr.-Ing. P. Chardabellas: **Baugrubenumschließung nach dem Gefrierverfahren.**

Gr.-8°. 141 S., 103 Abb., eine Ausklapptafel. 1953

Geh. DM 14,50

Heft 10

Prof. Dr.-Ing. A. Pucher: **Über die Biegemomente der Randträger von kreuzweise bewehrten Fahrbahnplatten.**

Dr.-Ing. E. Gruber: **Das durch elastische Spanten versteifte, beliebig gelagerte Rohr.**

Gr.-8°. 65 S., 27 Abb. 1955

Geh. DM 9,80

Heft 11

Prof. Dr. techn. F. Reinitzhuber: **Das Knicken gerader Stäbe mit linear veränderlicher Längskraft im elastischen und unelastischen Bereich.**

Dr.-Ing. F. Czerny: **Tafeln für gleichmäßig vollbelastete Rechteckplatten.**

Gr.-8°. IV/88 S., 64 Abb. 1955

Geh. DM 14,80

Heft 12

Dipl.-Ing. Uwe Bathelt: **Das Arbeitsverhalten des Rüttelverdichters auf plastisch-elastischem Untergrund.**

Gr.-8°. IV/52 S., 47 Bilder. 1956

Geh. DM 8,40

Heft 13

Prof. Dr.-Ing. K. Walz: **Undurchlässiger Beton.**

Gr.-8°. IV/48 S., 25 Abb.

Geh. DM 8,30

Heft 16

Dr.-Ing. Otto Köller: **Einflussfelder für die Hauptträgerschnittkräfte zweistegiger Plattenbalkensysteme.**

Gr.-8°. IV/31 S., 15 Abb.

Geh. DM 6,—

Zu beziehen durch jede Buchhandlung

VERLAG VON WILHELM ERNST & SOHN · BERLIN-WILMERSDORF

7.60